

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

Мастер Шарман
ВНЕЕЖЕТ



Игорь Шарыгин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВИНЕГРЕТ

ИЗДАНИЕ АГЕНТСТВА «ОРИОН»

Москва, 1991

Шарыгин И. Ф. *Математический винегрет.*

Книга содержит занимательные математические задачи, для решения которых не требуется больших знаний. Лишь бы быть сообразительным и остроумным. Задачки решать могут и взрослые, и дети даже начальных классов. Хорошо, если они будут делать это вместе.

© И. Ф. Шарыгин

ISBN 5-85934-002-8

ИЗДАНИЕ АГЕНТСТВА «ОРИОН»

Москва, 1991

ОТ АВТОРА

Герой повести М. А. Булгакова «Собачье сердце» утверждал, что больные, читающие периодику, выздоравливают хуже, чем лишенные этой возможности. Сегодня положение усугубляется еще и тем, что при отсутствии пищи материальной на бедного обывателя обрушивается нескончаемый поток псевдодуховной пищи, вызывая аллергию и несварение даже у людей, в принципе здоровых, но интеллектуально неподготовленных, а потому неспособных отличить здоровые зерна от плевел.

С другой стороны, резкое ухудшение жизненного уровня и другие многочисленные беды, обрушившиеся на нашу страну, вызывают у непонимающего и отчаявшегося народа ностальгию по отдаленному и даже совсем близкому, хотя и отнюдь не светлому, прошлому. А ведь все происходит в полном соответствии с теорией, а именно — с «теорией перестройки». Оказывается, такая теория уже достаточно разработана математиками. В частности, она утверждает следующее. Пусть система может функционировать в двух режимах (командно-административная система и свободный рынок). В каждом режиме система стремится занять оптимальное, устойчивое положение. Предположим, в одном из этих положений некая характеристика (благополучие населения) существенно ниже, чем в другом, и под влиянием внешних воздействий происходит перестройка системы из одного, неудачного с точки зрения этой характеристики, режима в другой. Оказывается, что при этом неизбежно сначала происходит резкое ухудшение целевой характеристики, а сама система оказывает все более возрастающее сопротивление перестройке. Не правда ли, все сходится?

В этой маленькой книге, возможно лишь первой из серии, автор хотел бы немного приоткрыть дверь в мир

математики для непосвященного человека. Ведь большинство наших соотечественников имеют об этой науке весьма смутное представление, связывая с ней неприятные воспоминания о синусах и логарифмах, каких-то прогрессиях и загадочных трехчленах, к тому же еще и квадратных. Для понимания всего, что здесь представлено, достаточно минимальных знаний на уровне средней школы, а для большей части — даже начальной. Автор хотел показать, что математике не чуждо и своеобразное остроумие, не такое как в КВН, но все же.

Если у Вас есть какое-то время для досуга, желание немного помассировать свои извилины, попробуйте, порешайте занимательные задачи. А вдруг Вам это понравится! Да и польза тоже возможна.

«Пора популяризировать изыски».
И. Северянин.
«Прцветание и совершенствование
математики тесно связаны с
благополучием государства».
Наполеон

Для справки. В Париже есть улицы, носящие имена выдающихся математиков. Это улицы Лежандра, Реомюра, Паскаля, Бюффона, Карно, Декарта, Лейбница.

Вопрос. Укажите, в каких городах нашей великой страны имеются улицы, носящие имена великих математиков?

Анекдот. Однажды Шерлок Холмс и его неизменный спутник Ватсон отправились в путешествие на воздушном шаре. Сильный ветер погнал их шар в неизвестном направлении. Затем ветер несколько унялся, и они приземлились в пустынной и загадочной местности.

Вскоре, однако, они заметили приближающегося к ним человека.

— Не могли бы Вы, хотя бы приблизительно, сказать нам, где мы находимся? — спросил его Холмс.

Человек задумался на некоторое время и затем ответил:

— Почему приблизительно? Я могу ответить абсолютно точно. Вы находитесь в гондоле воздушного шара.

Очередной порыв ветра понес шар дальше, в неизвестном направлении.

— Черт бы побрал этих математиков! — раздраженно проговорил Шерлок Холмс.

— А почему Вы считаете, что этот человек был математиком? — как всегда удивился Ватсон.

— Ну, во-первых, прежде чем ответить, он подумал, а во-вторых, его ответ был абсолютно точен и абсолютно бесполезен для нас.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Выборы генерального секретаря. На учредительном съезде партии «Номенклатура за демократию» должны состояться выборы генерального секретаря партии. В соответствии с регламентом выборы проводятся по двухступенчатой схеме: если на первом этапе ни один из кандидатов не набирает более половины голосов, то проводится второй тур, в котором соревнуются два кандидата, набравшие наибольшее число голосов в первом туре. Все делегаты съезда разделились на три фракции: «Новая волна», «Слуги народа» и «Фундаменталисты», в которые входят соответственно 40%, 32% и 28% числа делегатов съезда. Каждая из фракций выдвинула своего кандидата — соответственно Акселератова, Баранова и Волкова. Известно также, что в случае неуспеха своего кандидата на втором туре сторонники А в большинстве своем поддержат Б, сторонники Б в этом случае разделятся примерно пополам между А и В, и, наконец, сторонники В будут поддерживать Б. Как Вы думаете, кто в результате таких выборов станет генеральным секретарем партии?

2. Победит сильнейший, или необычайная дуэль. Три гусара во время одной вечеринки смертельно поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Условия дуэли следующие: все трое располагаются на равных расстояниях друг от друга и по очереди в определенном порядке в соответствии с заранее брошенным жребием делают по одному выстрелу. (При этом мишень каждый выбирает по своему усмотрению).

Дуэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется лишь один из трех. Каждый из них хорошо знает стрелковые возможности соперников, при этом гусары А и Б попадают в среднем не менее 9 раз из 10, а гусар В — примерно 6 раз из 10. Кто из них имеет больше всего шансов остаться в живых в результате этой дуэли, если предполагать, что каждый собирается максимально использовать свои возможности?

3. Просто проценты. Как это ни печально, но многие наши сограждане весьма смутно разбираются в таком элементарно-школьном понятии, как «процент», а по этой причине многочисленные сообщения о повышении чего-то или понижении иного на то или другое число процентов зачастую остаются пустым звуком, не напол-

няются никаким реальным содержанием. Даже такой простой вопрос «Как изменится цена изделия, если сначала ее увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?» ставит многих в затруднительное положение. А вот еще задачка, полезная работникам торговли и удивительная для работников правоохранительных органов.

На овощную базу привезли 10 т крыжовника, влажность которого равнялась 99%. За время хранения на базе влажность уменьшилась на 1%. Сколько крыжовника хранится теперь на базе?

4. Как денщик сапоги продавал (старинная задача). Ситуация, описанная в следующей задаче, имеет много различных оформлений. Приведем одно из них.

Генерал отправил денщика на рынок продавать сапоги. Цену им он определил в 15 руб. Денщик встретил на рынке двух одноногих инвалидов и продал каждому из них по сапогу по 7 с половиной рублей. Генерал, узнав об этом, заявил, что ветеранам можно было бы уступить сапоги и подешевле. Он дал денщику пятерку и приказал разыскать инвалидов и вернуть каждому по 2 с половиной рубля. Денщик по дороге зашел в трактир, 3 рубля прогулял, а затем, найдя инвалидов, вернул каждому по рублю.

А теперь подсчитаем. Каждый из инвалидов заплатил в итоге по 6,5 руб., то есть всего они заплатили 13 руб. 3 рубля денщик прогулял. Имеем $13 + 3 = 16$. Откуда взялся лишний рубль?

5. Кто больше зарабатывает? Иногда даже в простейших ситуациях наш здравый смысл не сразу дает правильный ответ. Интересно, сумеете ли Вы быстро разобраться в следующей задаче?

Два человека устроились на одинаковые должности в различные организации. Им положили равные оклады, выплачиваемые равными частями дважды в месяц. Учитывая прогрессирующую инфляцию, в трудовом соглашении оговорен порядок прибавок к зарплате. Одному из них по истечении каждого полумесяца добавляется 50 руб., а другому после каждого месяца добавляется 200 руб. Кто из них в итоге больше зарабатывает?

6. Эта ужасная геометрическая прогрессия. Миром правит экспонента! (Экспонентой математики называют показательную функцию, то есть функцию вида a^x . При дискретных значениях аргумента x получаем известную геометрическую прогрессию). Человеческая же (осо-

бенно обывательская) интуиция, психология более ориентирована на линейные зависимости. Отсюда многие недоразумения и даже заблуждения. Мы полагаем, что удвоив, например, вложения в сельское хозяйство, мы вдвое увеличим его производство, что если система держалась достаточно долго (скажем, 73 года), то и на наш век хватит. К сожалению, это не так. Вот несколько примеров, совершенно элементарных, иллюстрирующих скверный нрав экспоненты.

6.1. Начнем с классической задачи. Существует легенда, согласно которой изобретатель шахматной игры запросил у властелина, восхищенного этой игрой, следующую награду: за первую клетку доски — одно пшеничное зерно, за вторую — два, за третью — четыре, и т. д., за каждую последующую — в два раза больше, чем за предыдущую. Считая, что масса одного зерна равна $1/4$ г, а максимальный годовой урожай Земли равен 5×10^{10} т (эта оценка завышена. Ее можно получить, если считать, что вся пахотная земля идет под зерновые), оцените, за сколько лет можно собрать по всей Земле урожай, необходимый для выплаты причитающейся награды.

Вот еще две простые, но поучительные задачи на ту же тему.

6.2. Хозяин сидит на берегу пруда, зарастающего сорняками. Каждый день число сорняков удваивается. Он собирается приступить к расчистке, как только зарастет половина пруда. Через месяц половина пруда оказалась заросшей. Сколько дней у него остается на расчистку?

6.3. Известно, что некий вид бактерий размножается делением со скоростью 1 деление в секунду (каждую секунду бактерии раздваиваются). Лаборант заметил, что если посадить в пустой сосуд 1 бактерию, то через 1 минуту этот сосуд окажется полным. Через какое время наполнится сосуд, если вначале посадить в него 2 бактерии?

7. *Детские вопросы и ответы.* Как все знают, дети способны задавать вопросы, на которые мало кто из взрослых сможет ответить. И наоборот, на иные «взрослые» вопросы дети способны дать столь неожиданные ответы, что взрослым остается лишь признать свое поражение. Вот два примера.

7.1. Маленькая девочка предлагает отцу следующую придуманную ею загадку: голова, как холодильник, во

все стороны волосы-иголки, руки короткие и толстые, хвост длинный и тонкий. Что это такое?

7.2. Отец с хитрой улыбкой задает своему сыну-первокласснику вопрос: назови мне самое большое число. Получив ответ, он лишь удивленно качает головой. Что ответил сын?

8. Продолжить последовательность: Во многих психологических тестах встречаются задания, в которых предлагается продолжить ту или иную последовательность. Большинство подобных заданий математически вполне бессмысленны. Рассказывают, что великий советский физик Д. Ландау на приемных экзаменах в аспирантуру предлагал поступающим продолжить последовательность букв «о», «д», «т», «ч», «п». Утверждают, правда, что решивших эту задачу он в аспирантуру не принимал, полагая, что отвечающий либо гений, либо идиот. Но если бы тот был гением, то смог бы проявить свою гениальность в каком-либо научном исследовании, ему (Ландау) известном, — а идиоты не нужны.

Несмотря на это предупреждение, предлагаем Вам попытаться угадать закон, задающий следующие последовательности, и продолжить каждую:

8.1. 101, 112, 131, 415, ...

8.2. 3, 2, 1, 7, 4, 1, 1, 8,

9. *Несколько вопросов около глобуса.*

9.1. Какой город южнее: Рим или Нью-Йорк?

9.2. Какой город восточнее: Хабаровск или Владивосток?

9.3. Существуют ли в Европе точки расположенные западнее, чем какие-то точки в Америке?

9.4. Есть ли в Советском Союзе точки, расположенные западнее Берлина?

9.5. Корабль вошел в Панамский канал со стороны Атлантического океана и вышел в Тихий океан. На сколько (приблизительно) градусов его точка выхода расположена западнее, чем точка входа?

9.6. Предположим, что земной шар по экватору обтянут плотно веревкой. Вербку увеличили на 1 м. Будем считать, что образовавшийся зазор равномерно распределен по всему экватору. Сможет ли в этот зазор прошмыгнуть мышь?

9.7. Человек вышел из некоторой точки земного шара, прошел 1 км на север, затем — 1 км на восток, а затем —

1 км на юг и вернулся в исходную точку. Для каких точек земного шара возможно подобное путешествие?

9.8. Человек вышел из некоторой точки земного шара, прошел 10 км на север, затем — 10 км на запад, 10 км на юг и 10 км на восток и вернулся в исходную точку. Для каких точек Земли возможно подобное путешествие?

10. *Сколько прожил император?* Как утверждают учебники истории, римский император Август родился в 63 г. до нашей эры, а умер в 14 г. нашей эры. Сколько полных лет прожил Август, если предположить, что в год смерти он успел справить свой день рождения?

11. *Сколько лет Пете?* Петя утверждает, что позавчера ему было 10 лет, а в будущем году исполнится 13. Возможно ли это?

12. *Из жизни номенклатуры.* За одним начальником, живущим на своей государственной даче, по утрам приезжала машина и отвозила его на работу к определенному времени. Однажды этот начальник, решив прогуляться, вышел за 1 ч до приезда машины и пошел пешком ей навстречу. По дороге он встретил машину и прибыл на работу за 20 мин до ее начала. Сколько времени продолжалась прогулка?

13. *Средняя скорость.* С какой средней скоростью автомашина проехала путь из одного города в другой, если одну половину пути она ехала со скоростью 40 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч?

14. *Улитка на склоне.* Улитка взбирается по крутому склону длиной 10 м. Она движется лишь днем и преодолевает за день 3 м, ночью же она отдыхает и за это время под действием силы тяжести сползает на 2 м. Через какое время улитка достигнет вершины?

Продолжим задачу. Предположим, что перевалив через гребень, улитка сразу же начинает спуск в том же режиме. Через какое время после начала движения она вновь окажется на горизонтальной поверхности?

15. *Червяк и книги.* На книжной полке в правильном порядке стоит трехтомное собрание сочинений некоего автора. Толщина первого тома равна 17 мм, второго 15 мм, а третьего — 12 мм. Толщина переплета равна 1 мм (она входит в толщину тома). Книжный червь прополз от первой страницы первого тома до последней страницы третьего тома. Какой длины путь прополз червяк?

16. *Необычная переправа.* Два путешественника по-

дошли к реке. На берегу реки обнаружилась лодка, способная перевезти лишь одного человека. Тем не менее они смогли переправиться через реку и продолжить путешествие. Как это могло быть?

17. Задача о переправе. В старинном русском сборнике занимательных задач есть следующая задача.

«Три ревнивых мужа, пришедши с женами своими к берегу реки, нашли при оном лодку, в которую по ее малости более двух человек вмещаться не могло. Почему спрашивается, как бы через реку переехать сим шести человекам так, чтобы ни одна жена с чужим мужем не переезжала и ни на котором берегу не оставалась».

У Льюиса Кэрролла имеется усложненный вариант этой задачи — для четырех супружеских пар.

18. Как решил задачу Удодов-старший. Если помните, в рассказе А. П. Чехова «Репетитор» гимназист Егор Зиберов не сумел решить арифметическую задачу, а отец репетитуемого им ученика, отставной губернский секретарь Удодов, довольно быстро, пощелкав на счетах получил правильный ответ. Не смогли бы Вы также арифметически решить эту задачу? Вот она.

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?

19. Золотые слитки. Эту задачу также следует решать арифметически.

Имеются два слитка массой 2 кг и 3 кг с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток необходимо разрезать на две части так, чтобы из четырех полученных кусков можно было изготовить два слитка массой 1 кг и 4 кг, но с равным процентным содержанием золота. На какие части надо разрезать каждый из исходных слитков?

20. Как разделить пол-ореха? Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него (у первого) орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четвертой части образовавшихся у него (у второго) орехов и еще пол-ореха, затем это сделал третий. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

21. Сви́зьи в сви́нарниках. Автор этой задачи-шутки — Льюис Кэрролл.

Можно ли разместить 24 свиней в четырех сви́нарниках, расположенных в вершинах квадрата, так, чтобы при обходе этого квадрата по периметру всякий раз число свиней в следующем сви́нарнике было бы ближе к 10, чем в предыдущем.

22. Три задачи на одну идею. Следующие три задачи при внешнем различии оказываются абсолютно идентичными.

22.1. После заготовки дров работник подсчитал, что из начального количества бревен получилось 72 полена, при этом было сделано 53 распила. Сколько бревен было сначала?

22.2. Плитка шоколада состоит из отдельных долек, образующих 4 горизонтальных и 8 вертикальных рядов. За какое наименьшее число разломов эту плитку можно разломать на отдельные дольки, если всякий раз ломать разрешается лишь один кусок?

22.3. В соревнованиях по кубковой системе (с выбыванием проигравшего) принимают участие 100 команд. Сколько надо провести игр для выявления победителя?

23. Сколько длится один период? Определите минимально возможное время продолжительности периода хоккейного матча, если известно, что в момент его начала и в момент окончания стрелки часов (часовая и минутная) были перпендикулярны.

24. Задача про электронные часы. Эта задача никак не могла появиться в старину. Она также показывает, что забавные вопросы, интересные задачи буквально рассыпаны вокруг нас, надо лишь смотреть, видеть и размышлять.

Сколько времени в течение суток на табло электронных вокзальных часов светится хотя бы одна цифра 2 (часы не показывают секунды)?

25. Как измерить диагональ кирпича? Предложите способ измерения диагонали обыкновенного строительного кирпича, который легко реализуется на практике. Постарайтесь при этом забыть о теореме Пифагора.

26. Соприкасающиеся монеты, карандаши и пирамиды.

26.1. Расположите 5 одинаковых монет так, чтобы любые две из них соприкасались.

26.2. Расположите 6 одинаковых карандашей (цилин-

дрической формы) так, чтобы любые два из них соприкасались. Сделали? А теперь попытайтесь расположить таким же образом 7 карандашей.

26.3. Расположите в пространстве 8 треугольных пирамид (не обязательно равных) так, чтобы любые две из них соприкасались по куску поверхности ненулевой площади.

Попробуйте ответить на вопрос: можно ли расположить таким же образом 9 треугольных пирамид?

27 *Закрывать источник света.* В пространстве находится точечный источник света. Можно ли закрыть его 4 материальными шарами? (Это значит, что шары должны быть так расположены, чтобы любой луч света, идущий от источника, «натыкался» на какой-то шар).

28. *Удивительная конструкция.* Не пользуясь клеем, при помощи одних лишь ножниц вырежьте из обычного листа белой бумаги фигуру, изображенную на рисунке 1.

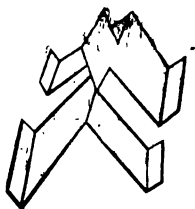


Рис. 1

29. *Несколько простых задач.* Каждую из них надо решить, потратив на обдумывание не более 1 мин.

29.1. Назовите все цифры от 9 до 0 в обратном порядке.

29.2. На потолке комнаты сидели три мухи. Вспугнутые хозяйкой они все одновременно полетели. Какова вероятность, что в какой-то момент времени они вновь окажутся в одной плоскости?

29.3. Петя утверждает, что он держит в кулаке две монеты на общую сумму 15 коп., причем одна из этих монет не пятак. Какие монеты держит Петя?

29.4. Подсчитайте в уме, чему равно выражение:

$$1\ 234\ 567\ 890^2 - 1\ 234\ 567\ 889 \times 1\ 234\ 567\ 891 = ?$$
$$19\ 911\ 991 \times 199\ 219\ 921\ 992 - 19\ 921\ 992 \times 199\ 119\ 911 \times$$
$$\times 199\ 119\ 911\ 991 = ?$$

29.5. Сумма в девять тысяч, девять сотен и девять рублей записывается в виде — 9909 руб. Запишите быстро сумму в двенадцать тысяч, двенадцать сотен, двенадцать руб.

29.6. Одна секретарша напечатала пять различных писем и надресовала пять конвертов с адресами. Предположим, что она вкладывает письма в конверты случайным образом. Какова вероятность, что ровно четыре письма будут вложены в конверты с адресами тех лиц, кому они предназначены?

30. *Самые обыкновенные построения.* Любой школьник, изучивший курс планиметрии, даже отъявленный троечник, должен уметь выполнять следующие три построения при помощи циркуля и линейки:

через данную точку A вне данной прямой провести прямую, параллельную этой прямой;

из данной точки A вне прямой l опустить перпендикуляр на эту прямую;

из данной точки A на прямой l восстановить к ней перпендикуляр;

Не могли бы Вы выполнить каждое из этих построений, проведя не более трех линий? (Третьей линией должна быть искомая прямая).

31. *Неисправимый спорщик.* Помнится, в нашей группе был один студент, заядлый спорщик. Почти по любому поводу он предлагал заключить пари, которые, как правило, выигрывал. Так, он спорил, что сумеет угадать, какой будет счет в матче «Спартак»—«Торпедо» перед началом этого матча. В другой раз он поспорил, что в начинающемся небольшом международном футбольном турнире ни один футболист не забьет ни одного мяча. И, представьте себе, выиграл этот спор.

Следует признать, что иногда он и проигрывал, но при этом не очень расстраивался. Помнится, он поспорил на рубль с другим студентом, что если тот даст ему 5 руб, то он даст сдачи 100 руб. И проиграл это пари.

Поскольку он считал себя хорошим ясновидцем и отказывал в этом всем остальным, то в качестве доказательства предлагал следующее пари. Он описывает на бумаге некое событие, которое произойдет, либо не произойдет в течение ближайших 10 мин. Эта записка кладется на стол под пепельницу или иной предмет. Его соперник в свою очередь пишет на бумаге одно слово: «да» или «нет». Понятно, «да» означает, что предполагаемое

событие произойдет, а «нет», — что не произойдет. По истечении 10 мин. записки зачитываются, и если соперник нашего студента угадывает, то он получает 100 руб, если же не угадывает, то выплачивает студенту 1 руб. Не могли бы Вы догадаться, о каком событии говорилось в записке нашего студента, если он в принципе не мог проиграть?

32. *Разрезание фигур на клетчатой бумаге.* На рис. 2 изображены две фигуры. Первую из них надо разрезать на три равные фигуры, а вторую на пять. Интересно, за какое время Вы справитесь с этим заданием?

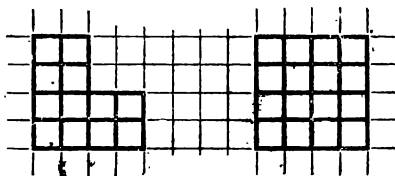


Рис. 2

33. *Теорема Пифагора.* Вы не забыли еще теоремы Пифагора? Существует, вероятно, несколько десятков способов ее доказательства. Воспроизведите хотя бы одно.

34. *О бочке с медом, бочке с дегтем и одним карточном фокусе.*

Вероятно, для первой задачи следовало бы выбрать иную формулировку, поскольку предлагаемая может вызвать справедливый гнев нашего простого советского человека. Ну, да ладно!

Итак, имеются две бочки — бочка с медом и бочка с дегтем. Из первой зачерпывают некоторое количество ее содержимого, переливают во вторую, по возможности перемешивают, а затем такое же количество смеси возвращают в первую бочку. Эта операция повторяется несколько раз. Спрашивается, в результате этих операций, чего больше — дегтя в меде, или меда в дегте?

Если Вы справились с этой задачей, то, возможно, угадаете, в чем секрет следующего карточного фокуса. Фокусник берет колоду карт (52 штуки), обращенных рубашкой вверх, отсчитывает из них 20 штук, переворачивает рубашкой вниз и передает зрителю. Зритель, смешав перевернутые карты со всей колодой, тщательно пе-

ретасовывает колоду так, что перевернутые карты случайным образом распределяются в ней. Затем, держа колоду под столом, чтобы карты не были видны, отсчитывает 20 верхних карт и передает их фокуснику.

Фокусник, беря стопку и держа ее все так же под столом, говорит: «Сейчас я на ощупь постараюсь уравнять число перевернутых карт в моей части колоды и в вашей. Для этого мне потребуется перевернуть еще несколько карт». Затем после небольших манипуляций все так же под столом вытаскивает свои карты, раскладывает их на столе, подсчитывает перевернутые. Их оказывается ровно столько, сколько среди 32 карт зрителя. В чем секрет этого фокуса?

35. *Самопересекающаяся ломаная.* Изобразите шестизвенную замкнутую ломаную, каждое звено которой ровно один раз пересекается с каким-то другим звеном этой ломаной.

36. *У входа в пещеру Али-Бабы.* У входа в пещеру, где хранятся сокровища Али-Бабы, стоит устройство, не позволяющее проникнуть в пещеру непосвященному. Снаружи это устройство похоже на диск, в котором проделаны в виде квадрата четыре отверстия. Внутри каждого отверстия есть невидимый снаружи выключатель. Каждый выключатель имеет два положения «вверх» и «вниз», причем легко определить на ощупь, в каком положении находится выключатель. Человек имеет право опустить руки в любые два отверстия и придать выключателям желаемое положение. После этого диск начинает быстро вращаться и останавливается в некотором положении. (При этом нельзя установить, как новое положение диска связано с предыдущим). После этого вновь можно манипулировать любыми двумя выключателями. Дверь в пещеру откроется лишь в том случае, если все четыре выключателя окажутся в одном положении. Указанные манипуляции можно проделать не более шести раз. В противном случае на неудачника обрушится тяжелая плита.

Смогли бы Вы попасть в пещеру Али-Бабы?

37. *Еще несколько простых задач.*

37.1. Как разделить 7 яблок между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать более, чем на пять частей?

37.2. На стоянке такси стояло 10 машин. Две передние отъехали. Сколько машин осталось на месте?

37.3. На сковороде могут одновременно жариться две котлеты. Каждую котлету нужно обжарить с двух сторон, при этом для обжаривания ее с одной стороны требуется 2 мин. За какое наименьшее время можно поджарить три котлеты?

37.4. Известно, что бумеранг можно бросить так, что он вернется обратно. Можно ли бросить теннисный мяч, чтобы он вернулся обратно?

37.5. Как отмерить 15 мин, необходимых для варки вкрутую яйца, при помощи песочных часов, отмеряющих 7 мин и 11 мин?

37.6. В одной комнате имеется три выключателя, а в другой присоединенные к ним лампочки, при этом какой выключатель соответствует той или иной лампочке неизвестно. Разрешается, производя какие-то манипуляции с выключателями, зайти затем в соседнюю комнату. Можно ли при этом установить, какой выключатель соответствует той или иной лампочке?

38. *Эти постоянные и изменчивые вероятности.* Предлагаем Вам две простые задачи. В одной из них после получения некоторой информации исходная вероятность меняется, а в другой остается прежней. Разберитесь, в какой задаче имеет место то или иное явление.

38.1. В черном ящике лежит шар, который с равной вероятностью может быть либо черным, либо белым. В ящик добавляется белый шар, затем наугад извлекается шар, оказавшийся белым. Какова вероятность, что и оставшийся шар является белым?

38.2. Между тремя победителями телевизионной лотереи разыгрывается главный приз. Допустим, что это происходит в субботу, а объявление о результате будет сделано лишь в понедельник. Джентльмен А очень хотел бы узнать результат жеребьевки пораньше. Он знаком с арбитром, производившим жеребьевку, звонит последнему и просит, если и не сообщить, кто выиграл главный приз, то хотя бы сказать, кто из двух оставшихся его не выиграл. После некоторого размышления арбитр сообщает, что В не выиграл приз. Какова теперь вероятность того, что этот приз выиграл А?

39. *Кратчайший маршрут.* Комната представляет собой параллелепипед, одна стена которого имеет вид квадрата со стороной 2 м, пол — прямоугольник 2×5 . На квадратной стене на расстоянии $1/6$ м от пола и на равных расстояниях от нижних углов этой стены сидит

паук. Аналогичным образом на противоположной стене, но у потолка, сидит муха. Определить длину кратчайшего пути, по которому паук может доползти до мухи.

40. Развертки куба.

40.1. Какие из фигур, изображенные на рис. 3а, могут служить развертками единичного куба, а какие нет?

40.2. На рис. 3б изображены две необычных развертки куба. Как сложить из них куб?

40.3. Полоску бумаги 1×3 надо свернуть так, чтобы получился единичный куб.

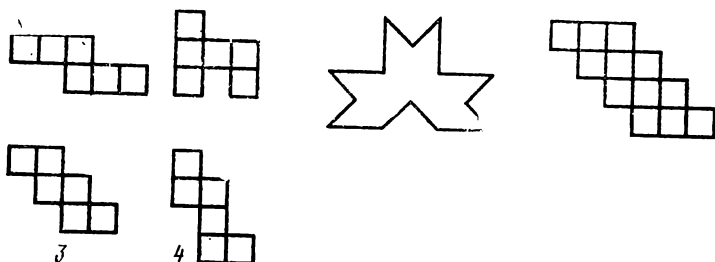


Рис. 3а, 3 б

41. Еще одна задача на разрезание. Фигуру, изображенную на рис. 4 (центр дуги — в вершине квадрата), разрезать на две равные фигуры. На три равные фигуры.



Рис. 4

42. Из двух квадратов — один. Имеются два квадрата — 3×3 и 1×1 . Разрезать эти квадраты на части, из которых можно было бы сложить один квадрат.

Если Вы справились с этой задачей, то попробуйте решить ее в общем виде: перекроить два произвольных квадрата в один.

43. Как следует бросать жребий? Монета является общепризнанным инструментом, с помощью которого можно бросать жребий, делать выбор между двумя равноправными возможностями. Предположим, что монета

несимметрична и имеются веские основания считать, что выпадение «орла» и «решки» имеет различные вероятности. Как с помощью такой неправильной монеты все же бросить жребий, так чтобы ни одна из сторон не могла считать себя обиженной?

44. *Одна очень простая игра и одна — не очень (для двоих).* На столе лежит 37 спичек. Разрешается по очереди брать не более 5 спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий игру или второй игрок? Как ему следует играть?

Рассмотрим ту же игру, но с одним дополнительным ограничением; запрещается повторять ход соперника. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку либо поставит соперника в положение, при котором у него нет разрешенного хода. Кто выиграет на сей раз?

45. *Поиграем в слова.* Если Вы устали от математики, то предлагаю поиграть в слова. Здесь имеется в виду отнюдь не та игра, в которую с таким удовольствием играют наши парламентарии. Правила очень простые: надо из букв одного слова составить как можно больше новых слов. Разрешенными являются лишь нарицательные (несобственные) существительные единственного числа в именительном падеже. Буквы «и» и «й», а также «е» и «ё» считаются различными. Можно вводить ограничения на минимальное число букв в слове, а также не учитывать слова, получающиеся группировкой без изменения порядка нескольких букв исходного слова (например, «штукатур» — «штука»). Выигрывает тот, кто составит больше слов, или тот, кто составит больше оригинальных, не встречающихся у других слов (так обычно играют, если число участников более двух). Можно добавлять очки за оригинальные многобуквенные слова. Впрочем, вероятно, разъяснять правила этой игры особой нужды нет, поскольку каждый из нас хоть раз в жизни в нее играл.

Многим знакомы пары слов, образованных одними и теми же буквами. Классической считается пара «апельсин» — «спаниель». Вот рекордная связка: товар, тавро, автор, втора, отвар, рвота (6 слов!). Кстати, о рекордах. Знаете ли Вы, какое слово является самым длинным в русском языке (не имеются в виду искусственные сложные слова типа «гидрометео...»)? Оказывается, «пересвидетельствование» (23 буквы!). А самое длинное

слово, состоящее из различных букв? «Разгильдяйство» (14 букв!).

А вот еще одна забавная коллекция фамилий и профессий: повариха Архипова, рисовод Сидоров, конвоир Коровин, и даже невропатолог Егор Платонов.

В качестве соревнования предлагаю два слова «перестройка» и «вертикаль». Ограничение — не менее 5 букв в слове.

46. И вновь несколько простых, а может, и не очень, задач.

46.1. Кто изображен на портрете?

В семье я рос один на светё,
И это правда, до конца.
Но сын того, кто на портрете,
Сын моего отца.

Как изменится ответ на вопрос, если в третьей строчке будет: «Отец того, кто...»?

46.2. Следующие четыре строки представляют собой зашифрованное всем известное четверостишие.

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
Юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящь,
Мэ юдёмэд ф лэщге нащ.

46.3. Школьники 3-го класса одной московской школы совершили автобусную экскурсию в Волоколамск. Один из них, рассказывая дома об этой поездке, нарисовал следующую картинку (рис. 5). Можно ли по этой картинке определить, куда идет автобус, в Москву или в Волоколамск?

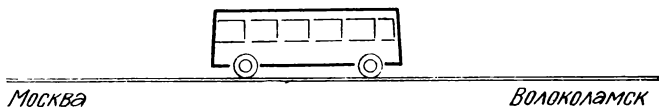


Рис. 5

46.4. Уезжая в командировку на 9 дней, инженер Додырин взял с собой кусок мыла прямоугольной формы. За неделю командировки кусок по всем направлениям уменьшился вдвое. Хватит ли остатка на последние 2 дня?

46.5. Хотите проверить свой глазомер? Возьмите обыкновенный бумажный рубль и две монеты достоин-

ством 1 коп. и 2 коп. (Надеюсь, это не составит для Вас большого труда). И попробуйте, не прикладывая монету к купюре, ответить на вопрос: сколько цифр из семизначного номера, имеющегося на рубле, закрывает монета в 1 коп., а сколько — 2 коп.?

Кстати, ответьте и еще на один вопрос: может ли в отверстие на бумаге размером в трехкопеечную монету пройти пятак?

46.6. Девять точек расположены в виде квадрата по три в каждом вертикальном и горизонтальном ряду. Не отрывая от бумаги карандаша, изобразите четырехзвенную ломаную, проходящую через все точки.

47. *Современный вариант старинной задачи.* С незапамятных времен известна серия задач, в которых требуется с помощью двух сосудов заданной емкости отмерить определенное количество жидкости. Например, нетрудно с помощью сосудов в 3 и 5 л отмерить 1 л жидкости. А вот задача, лишь на первый взгляд идентичная ей.

К продавцу, стоящему у бочки с квасом, подходят два веселых приятеля и просят налить им по литру квасу каждому. Продавец замечает, что у него есть лишь две емкости в 3 л и 5 л, и поэтому он не может выполнить их просьбу. Приятели продолжают настаивать и дают продавцу 100 руб. с одним условием, чтобы он выполнил их заказ. После некоторого размышления продавец сумел это сделать. Каким образом? А чтобы читатель не мучился вопросом, в чем же отличие этой задачи от классического варианта, сразу же разъясним: приятели желают получить свои порции одновременно. Можно, конечно, считать это блажью, но таково условие.

48. *Деление пополам.* Идею этого метода иллюстрирует следующий стишок:

— Несчастный случай! Ваш слуга убит!

Он надвое разрезан, мистер Смит!

— Ну, что ж! Тогда любезность окажите,

Ту половину, где ключи, пришлите.

Итак, если Вы желаете угадать задуманное кем-то число за наименьшее число вопросов, задавая вопросы, предполагающие лишь ответы «да» или «нет», то самое лучшее — всякий раз делить множество, в которое оно входит, пополам. Так, например, если задумано какое-то число от 1 до 16, то угадать его наверняка можно за 4 вопроса и, вообще говоря, быстрее нельзя. Правда,

реализовать нужное деление пополам в реальных ситуациях возможно далеко не всегда! В частности, это трудно сделать в известной игре — угадать задуманную известную личность. (Попробуйте сыграть в эту игру с приятелем, загадав Павлика Морозова. Интересно, за сколько вопросов он его угадает. Норма — 20 вопросов).

Решите теперь две задачи на эту тему.

48.1. В лаборатории имеется некоторое количество проб крови, взятых у различных людей. Одна из них содержит весьма редкую разновидность вируса, определяемую при помощи дорогостоящих и трудоемких исследований. Чтобы уменьшить число исследований, лаборатория обратилась за консультацией к профессору математики. Профессору объяснили, что при анализах можно брать части различных проб, смешивать их и определять, присутствует ли этот вирус в полученной смеси. Далее, узнав общее число исследуемых людей (оно оказалось между 100 и 200), профессор предложил исследовать сначала одну любую из имеющихся проб, утверждая, что общее число анализов при этом все же будет минимальным. Сколько людей проходило исследование?

48.2. За какое наименьшее число вопросов можно угадать задуманное число между 1 и 16, если один раз отвечающий имеет право соврать?

49. *Несколько задач про взвешивание.* Тема «взвешивания» также одна из наиболее распространенных в элементарной математике с древности до наших дней. Вот несколько образцов.

49.1. Один человек, покупая на рынке 2 кг яблок (для достоверности заметим, что происходило это достаточно давно), высказал предположение, что весы плохо отрегулированы — одно плечо у них короче другого. В связи с этим он предложил, чтобы продавец взвесил ему 1 кг яблок на одной чаше весов, 1 кг — на другой. Если предположить, что покупатель прав, кто выиграл при таком взвешивании?

49.2. Имеется 80 монет, одна из которых фальшивая и поэтому легче остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти фальшивую? (Можно сравнивать по весу любые наборы из имеющихся монет).

49.3. Имеется 12 монет, одна из которых фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее, чем другие. За 3 взвешивания на весах без гирь найдите фальшивую.

49.4. Есть 5 булыжников различных по тяжести. За семь взвешиваний на весах без гирь расположите их по возрастанию массы.

50. Проверка на радиоактивность. Задачи на эту тему являются «достижением» наших дней. Вот один пример.

Известно, что среди 18 шаров два радиоактивные. Можно проверять на радиоактивность кучку из любых шаров. Как за 8 таких проверок наверняка найти оба радиоактивных шара?

51. Чет-нечет. Простые соображения, связанные с четностью, могут давать в некоторых случаях ключ к решению достаточно сложных задач. Вот несколько примеров.

51.1. При обмене 50 и 100-рублевых купюр подпольный миллионер Тарас Артемов получил в банке 1991 купюру, среди которых не было ни одной достоинством в 10 руб. Не вдаваясь в детали, кто кого обманул, докажете, что так быть не может.

51.2. На доске написаны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум прибавить по 1. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, сделать все числа равными?

51.3. По окончании игры в домино все кости оказались выложенными в цепочку, на одном конце которой оказалась пятерка. Какая цифра может быть на другом конце цепочки?

51.4. Может ли при каком-то n сумма дробей $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ оказаться равной целому числу?

51.5. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то оба соседа — девочки.

52. Четность плюс инвариант. Инвариант — значит «неизменяющийся». Инвариантом будет число, характеризующее изменяющуюся систему или отдельный элемент некоей совокупности, остающееся постоянным при изменении системы или же одинаковое для всех элементов совокупности. Так, инвариантом для человека является число конечностей, но число волос не является инвариантом. Вот две задачи на эту тему (плюс четность).

52.1. На столе стоят вверх дном 7 стаканов. Разрешается за один раз перевернуть любые 4 стакана. Можно ли через несколько шагов поставить все стаканы в нормальное положение?

52.2. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «—», как на рис. 6. Разрешается одновременно менять знаки во всех клетках, расположенных

в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы мы ни провели таких перемен, нам не удастся получить таблицу из одних «+».

53. Раскраски. Идею, вынесенную в заглавие, хорошо иллюстрирует следующая задача. Имеется квадрат 8×8 , у которого удалены две угловые клетки, расположенные

+	—	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 6

на одной диагонали. Можно ли этот квадрат замостить костяшками домино размерами 1×2 ? Решение дает нам правильная «шахматная» раскраска этой доски. Каждая костяшка домино закрывает две клетки разного цвета, в то время как клеток черного и белого цветов различного количество.

А вот еще две задачи на эту идею.

53.1. Участок прямоугольной формы разбит на квадраты, образующие n рядов по m квадратов в каждом ряду. Каждый квадрат является отдельным участком, соединенным калитками со всеми соседними участками. При каких n и m можно обойти все квадратные участки, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в первоначальный?

53.2. Все мы в детстве играли в «морской бой». Напомним, что играется он на квадрате 10×10 , на клетчатой бумаге. «Линкором» в этой игре называется «корабль» 1×4 . В связи с этим возникает вопрос: можно ли весь квадрат для морского боя разрезать на 25 линкоров? А кстати, ответьте еще на один вопрос: какое наименьшее число «выстрелов» надо сделать, чтобы наверняка хотя бы один раз попасть в линкор, одиноко плавающий по морю?

54. Задача о 10 фишках. Расположите 9 фишек так, чтобы они образовали 10 рядов по 3 фишки в одном ряду.

55. Автопортрет числа. Найдите десятизначное число, запись которого одновременно является рассказом об этом числе. А именно, первая цифра сообщает, сколько в этом числе нулей, вторая — сколько единиц, третья — число двоек, и т. д.

Найдите также пару десятизначных чисел, каждое из которых является описанием другого, т. е. первая цифра одного числа равна числу нулей в другом числе, вторые цифры взаимно информируют о числе единиц, и т. д.

И, наконец, найдите все трехзначные числа, равные сумме кубов своих цифр.

56. Принцип Дирихле. У математиков встречаются весьма странные «принципы», которыми они никогда не поступаются. Впрочем, любой здравомыслящий человек, ознакомившись с этими принципами, вынужден будет их признать. Вот, например, так называемый принцип Дирихле. Математики очень любят объяснения этого принципа сводить к примеру кроликов в клетках. Поступим так же и мы.

Если в 100 (или n) клетках сидит не менее 101 (или $n+1$) кролика, то хотя бы в одной клетке находится более одного кролика.

Удивительно, как на основе такого простого и даже чуть наивного принципа математикам удается решать весьма трудные задачи, доказывать красивые теоремы, причем не только элементарные.

Вот несколько задач на эту тему.

56.1. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество игр.

56.2. Докажите, что найдется число, записываемое одними единицами, делящееся на 1993.

56.3. Имеется 11 различных натуральных чисел не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

56.4. Докажите, что у любого многогранника найдутся по крайней мере две грани, являющиеся многоугольниками с равным числом сторон.

56.5. Квадратная доска 6×6 заполнена костяшками домино 1×2 . Докажите, что можно провести вертикаль-

ный или горизонтальный разрез этой доски, не пересекающий ни одной из костяшек домино.

57. Вероятностная интуиция. У каждого из нас с возрастом вырабатывается определенная вероятностная интуиция — умение оценивать шансы того или иного события. Правда, активное участие наших соотечественников в многочисленных лотереях и иных жульнических начинаниях вызывает сомнение в хорошем развитии этой интуиции или в умении пользоваться этим чувством.

Предположим, что Вам предложено заключить на равных условиях (т. е. величина выигрыша равна проигрышу) одно из следующих пари.

57.1. Вы и Ваш соперник берете по колоде карт, тщательно перетасовываете каждый свою колоду и начинаете выкладывать одновременно по одной карте на стол. Если ни в одной паре не окажутся совпадающие карты, выигрываете Вы. Если хотя бы однажды выложены будут две одинаковые карты,— ваш соперник.

57.2. Опрашивают 40 наугад выбранных прохожих. Если среди опрошенных найдутся хотя бы двое, празднующие свой день рождения в один и тот же день года, Вы проигрываете. Если все дни рождения различны,— выигрываете Вы.

Приняли бы Вы участие в подобных пари, особенно, если ставка достаточно высока?

58. Тасовка карт. Возьмем колоду из 32 карт, уложенных в некотором порядке, и начнем ее тасовать по следующему правилу. Верхнюю карту перекладываем в низ колоды, а следующую за ней кладем на стол, следующую — вновь под низ колоды, а затем на стол на лежащую там карту. И так далее, пока на столе не будет лежать вся колода.

Ответьте теперь на два вопроса:

какая карта окажется лежащей сверху после одной тасовки?

после скольких подобных операций колода вернется в исходное положение?

59. Лезу на санузел. Напомним определение, как говорят математики: «палиндромом» (русский эквивалент — «перевертыш») называется одно слово, фраза или выражение, одинаково читающееся с начала и с конца (без учета пропусков между словами и знаков препинания). Именно этим свойством обладает высказывание, вынесенное в заглавие. Многие российские по-

эты, оттачивая свою технику, составляли палиндромы. У В. Хлебникова есть целая поэма, написанная палиндромами. Чтобы не отбивать хлеб у профессиональных литераторов, не станем дальше углубляться в эту тему, но все же приведем несколько примеров. Вот короткий, как выстрел, и столь же точный палиндром: «Ленин ел». А вот, пожалуй, рекордный по длине: «Он рубил и потел от вина, холодно — он до лохани, в то лето пили бурно». А вот два палиндрома, образующие вместе утверждение: «На вид Иван, но сам масон».

Прежде чем сформулировать задачи, продемонстрируем один арифметический палиндром:

$$312 \times 221 = 68952; 25986 = 122 \times 213.$$

А теперь пара задач.

Найдите шестизначное число, являющееся палиндромом и точным квадратом.

Замените в следующем равенстве буквы на цифры, чтобы получилось верное равенство

$$\text{ШРАМ} \times \text{Ы} = \text{МАРШ}$$

60. Кое-что о математической логике и юриспруденции. Среди лиц, далеких от математики, существует преувеличенное представление о роли логики и дедукции в математике. Спору нет, роль эта достаточно значительна. Более того, умение логически мыслить отнюдь не бесполезно в обыденной жизни, может помочь принять верное решение в различных затруднительных ситуациях. С другой стороны, человек, формально-логически подходящий к явлениям жизни, к утверждениям своим и своих собеседников, невыносим в общении, способен усложнить жизнь и себе, и своим близким. Многие обычные высказывания, бессмысленные с логической точки зрения, приводят к логическим противоречиям и парадоксам. Утверждение: «Я лгу» — типичный пример логического противоречия. Так же противоречива поговорка: «Нет правил без исключения». В конце концов, понятие «демократии» задает вид государственного устройства, какового на самом деле не может быть.

Классическим примером, иллюстрирующим задачи логического типа, является задача о трех мудрецах.

60.1. Трем мудрецам показали пять колпаков: три черных и два белых. Затем им завязали глаза и надели всем троим по черному колпаку. После этого с них сняли повязки и предложили каждому, посмотрев друг на друга, определить, какого цвета колпак на нем. Через

некоторое время один из мудрецов догадался, что на нем черный колпак. Объясните, какие рассуждения позволили ему сделать такой вывод.

Следующая задача, а вернее история, может служить антитезой к предыдущей.

60.2. Одного человека приговорили к смертной казни. В приговоре было сказано, что казнь должна состояться не позднее, чем через 7 дней, начиная со следующего, но при этом приговоренный накануне казни не должен знать о том, что завтра будет казнь. Услышав это, преступник, неплохо знавший математическую логику, обрадовался, так как пришел к заключению, что условия приговора невыполнимы. В самом деле, если считать, что отсчет времени начинается с понедельника, то, рассуждал заключенный, казнь не может произойти в воскресенье, поскольку в этом случае в субботу ему об этом заведомо будет известно. Но поскольку казнь не может произойти в воскресенье, то она не может произойти и в субботу, так как в этом случае об этом станет известно в пятницу. Продолжая далее рассуждение, заключенный пришел к выводу, что казнь не может состояться ни в один день недели, и спокойно лег спать. На следующий день его казнили! При этом, как Вы сами видите, все условия были соблюдены. Вот и верь после этого логике!

60.3. Следующий рассказ иллюстрирует один забавный юридический казус.

Однажды в одном караван-сараяе встретились три погонщика верблюдов. При этом оказалось, что погонщики А и В смертельно ненавидели погонщика С. Ночью погонщик А встал и подлил в бурдюк с водой погонщика С смертельного яда. Погонщик В проснулся под утро и перед самым отправлением С проколол его бурдюк с водой так, что вся вода вытекла уже во время первого перегона. В результате С умер в пути от жажды.

Налицо убийство. Но кто убийца — вот вопрос. Вы скажете В, но адвокат В в суде легко опровергнет ваше утверждение, поскольку из бурдюка вытекла не живительная влага, а смертельно ядовитая жидкость. В результате благодаря действиям В погонщик С прожил даже дольше, чем в ином случае. Иные, но также вполне убедительные доводы может привести и адвокат А.

61. *Три гангстера.* Известно, что один из трех знаменитых в Чикаго гангстеров, клички которых Арчи,

Босс и Весли, украл портфель с крупной суммой денег. На допросе каждый из них сделал три заявления.

Арчи: 1. Я не брал портфель. 2. В день кражи я уезжал из Чикаго. 3. Портфель украл Весли.

Босс: 1. Портфель украл Весли. 2. Если бы и взял его, то не сознался бы. 3. У меня и так много денег.

Весли: 1. Я не брал портфель. 2. Я давно ищу хороший портфель. 3. Арчи прав, он уезжал из Чикаго.

В ходе следствия выяснилось, что у каждого из трех заявлений два верных, а одно нет. Кто украл портфель?

62. Невозможные объекты, «Предмет» обсуждения

ТРЕУГОЛЬНИК ПЕНРОУЗА

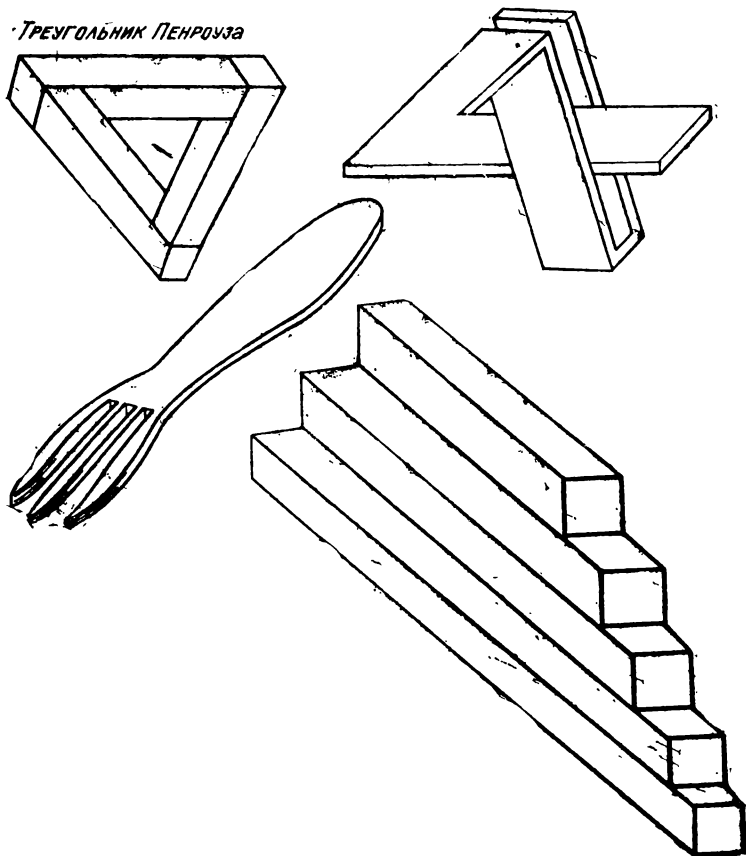


Рис. 7.

лучше всяких словесных объяснений разъясняют изображения на рис 7.

Говоря о невозможных объектах, нельзя не упомянуть об одном крупнейшем художнике нашего столетия Морисе Эшере, создавшем целый мир, населенный невозможными объектами. Произведения Эшера очень любят математики и физики и очень часто иллюстрируют его работами всевозможные научные и научно-популярные книги.

На рис. 8 изображена треугольная пирамида, в которой проведено сечение плоскостью, а также проекции (вид сверху) двух тел. Никаких невидимых ребер у этих многогранников нет. Не кажется ли Вам, что все эти рисунки относятся к категории невозможных? Почему?

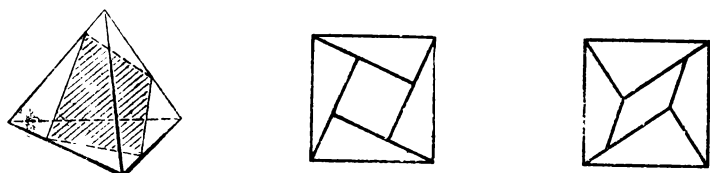


Рис. 8

63. Рыцари круглого стола. Восемь рыцарей каждый год в установленное время собирались за круглым столом и устраивали большой пир. При этом они свято выполняли одно условие: всякий раз у каждого рыцаря была новая пара соседей. Какое наибольшее число лет могли продолжаться подобные встречи?

64. Небольшая головоломка с 10 монетами. Расположите в ряд 10 монет. Любую из монет можно перенести над двумя ближайшими к ней и положить сверху на следующую за этими ближайшими. Требуется, следуя этому правилу, переложить монеты так, чтобы они образовали 5 пар, расположенных на равных расстояниях друг от друга.

65. Куры и петухи. Хозяйка купила на рынке курицу. Эта курица снесла два яйца, после чего попала на обеденный стол. Из каждого яйца, как известно, может вылупиться либо курица, либо петух. Каждый петух попал на стол, а каждая курица съедалась после того, как

успевала снести два яйца. Через некоторое время этот процесс оборвался, поскольку появились одни лишь петухи. Выяснилось, что петухов всего было съедено 17 штук. Сколько было съедено кур?

66. Странный калькулятор. Предположим, что имеется калькулятор, который может из данного целого числа a получить либо число $2a+1$, либо число $(a-1)/3$, если $a-1$ делится на три. Постарайтесь с помощью таких операций из 1 получить 8, а также 32. Желательно при этом, чтобы число шагов было как можно меньше.

67. Игра «ним». На столе лежат три кучки спичек, состоящие соответственно из 7, 11 и 13 спичек. Игроки по очереди берут любое количество спичек из любой кучки. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. В данной игре также выигрывает начинающий. Укажите, как он должен играть? Каким должен быть его первый ход?

Эта игра широко известна. Называется она «ним». В общем случае число кучек, как и количество спичек в каждой кучке, может быть произвольным. Тем не менее существует оптимальная стратегия, одинаковая для всех случаев, обеспечивающая одному из игроков, в зависимости от начальной позиции, неизменный выигрыш. Может, Вы сумеете найти эту стратегию?

68. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, и, наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате вся канава оказалась вырытой, а с начала работы прошло 8 ч. За какое время могли бы вырыть эту канаву все трое рабочих, работая вместе?

69. Задача на смеси. Имеются два сосуда емкостью 1 л и 2 л. Из содержимого приготовили 0,5 л смеси, содержащей 40% яблочного сока, и 2,5 л смеси, содержащей 88% яблочного сока. Каково процентное содержание яблочного сока в сосудах?

70. Путешествие по пустыне. Передвигаясь по пустыне, путешественник за один день может преодолеть 20 км, при этом он может нести с собой запас продуктов и воды на 6 дней и имеет право на маршруте делать склады. На краю пустыни расположена база, на которой имеется 30-дневный запас продуктов и куда после

окончания путешествия необходимо вернуться. Смогут ли путешественник углубиться в пустыню на расстояние более 135 км?

Может ли при тех же условиях путешественник пересечь пустыню шириной 210 км, если возвращение на базу обязательно?

71. Прогулки ученых. Профессор Иванов и доцент Поливанов живут недалеко друг от друга. Они любят прогуливаться по вечерам от своего дома до дома коллеги и обратно, проходя этот маршрут по несколько раз. Однажды они вышли из своих домов одновременно. В первый раз они поровнялись на расстоянии 55 м от дома профессора. Второй раз это произошло на расстоянии 85 м от дома доцента. На расстоянии 25 м от дома доцента находится газетный киоск, а неподалеку от дома профессора — киоск, торгующий мороженым. Известно, что выйдя из своих домов, профессор и доцент одновременно прошли мимо ближайших киосков. Чему равно расстояние между киосками?

72. Три топологические головоломки.

72.1. Концы веревки, завязанные в виде петель (рис. 9), надеваются на левую и правую руки. Сможете ли Вы, не снимая веревки с рук, завязать ее узлом?

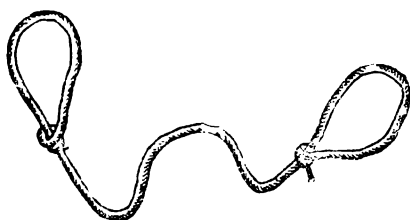


Рис. 9

72.2. Рассказывают, что однажды студенты-математики прицепили к пиджаку известного ученого И. Р. Шафаревича карандаш с веревкой, как показано на рис. 10 (петля короче длины карандаша). Несколько дней уважаемый профессор проходил с этим украшением. Затем перед началом одной лекции он торжественно снял пиджак и избавился от карандаша, протаскив пиджак через петлю на карандаше. Покажите, как можно избавиться от карандаша, не снимая пиджака.

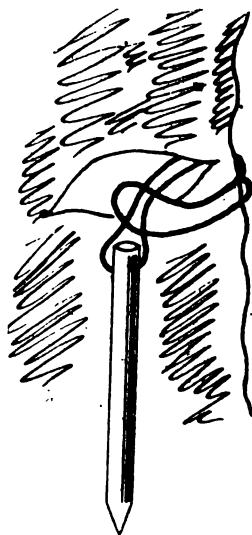


Рис. 10

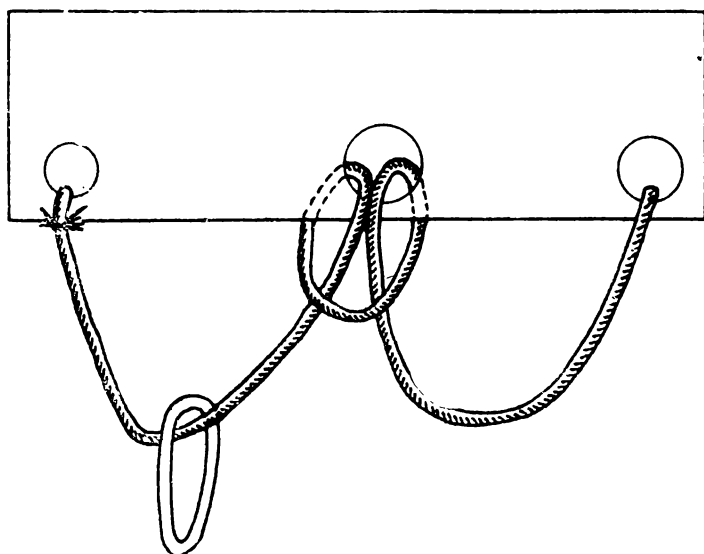


Рис. 11

72.3. В головоломке, изображенной на рис. 11, надо переместить кольцо на правую половину, ничего, понятно, не ломая и не развязывая.

73. *Средний сын рыжий.* Следующая головоломка, кстати весьма трудная, на первый взгляд кажется неразрешимой, поскольку в тексте условия вовсе отсутствуют числовые данные. Тем не менее она имеет однозначный ответ.

Два математика, не достигшие пенсионного возраста, после долгого перерыва встретились на одном из конгрессов. Приведем фрагмент их диалога:

— Ну, а дети у тебя есть?

— Конечно! У меня три сына

— А сколько им лет?

— Ну, если перемножить, то будет как раз мой возраст. Надеюсь, ты еще не забыл, сколько мне лет?

— (После короткого размышления). Не понимаю.

— Если сложить их возраст, то получится как раз сегодняшнее число.

— (Вновь после размышления). Все равно не понимаю.

— Ну, хорошо, скажу еще, что средний сын у меня рыжий.

— Теперь понял.

А Вы можете определить, сколько лет каждому из сыновей?

74. *Объем без интегралов.*

74.1. Рассмотрим два цилиндра, достаточно длинных, оси которых пересекаются под прямым углом. Радиусы цилиндров равны r . Найти объем общей части цилиндров.

74.2. Найти объем тела, который можно назвать «блином», получающегося следующим образом. Возьмем выпуклую плоскую замкнутую кривую, длины l , ограничивающую часть плоскости площади S . Построим всевозможные шары с центрами на этой кривой или внутри нее и радиусами r . Найти объем тела, заполняемого этими шарами.

75. *Задача о дырявой бочке.* Имеется бочка цилиндрической формы, заполненная водой. В дне бочки проделано отверстие. Известно, что половина бочки вытекла за 1 ч. За какое время вытечет вторая половина?

76. *Несколько задач для детей и взрослых.*

76.1. По кольцевой дороге в обоих направлениях

движутся поезда. Каждый поезд проходит все кольцо за 2 ч. В одном направлении поезда идут с интервалом 10 мин., а в другом — с интервалом 15 мин. Сколько встречных поездов встретит поезд, следующий в одном, и сколько в другом направлении за один круг?

76.2. На столе стоят 6 стаканов. Первые три пустые, а последние три наполнены водой. Как сделать так, чтобы пустые стаканы и полные чередовались между собой, если касаться можно лишь одного стакана?

76.3. Квадрат повернут 4 раза, каждый поворот на 90 градусов. Оказалось, что эти четыре поворота можно заменить одним и также на 90 градусов. Как это можно сделать?

76.4. Школьник, придя домой, удивил своих родителей следующим фокусом. Он тщательно печатными буквами написал на листе бумаги два слова: красным карандашом слово «кофе», а синим — слово «чай». Затем наполнил водой пробирку и предложил через воду посмотреть на каждое из этих слов. Первое слово осталось прежним, а второе перевернулось. В чем здесь дело?

76.5. В следующем равенстве необходимо передвинуть одну цифру так, чтобы оно стало верным: $101 - 102 = 1$.

76.6. Найти такие два числа, чтобы сумма, произведение и частное от деления одного на другое были бы равны между собой.

76.7. Два параллелограмма расположены, как показано на рис. 12. Доказать, что они равновелики.

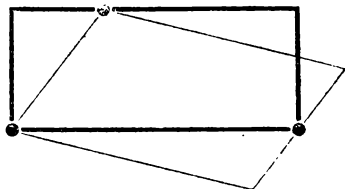


Рис. 12

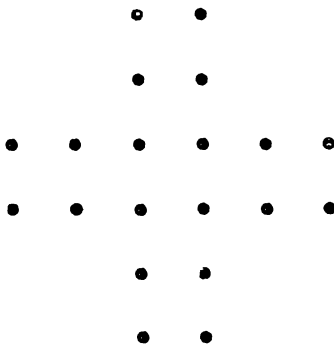


Рис. 13

76.8. Сколько квадратов с вершинами в данных точках (рис. 13) можно насчитать? Как убрать 6 точек, чтобы не осталось ни одного квадрата?

76.9. Четыре мальчика разрезали арбуз на четыре части и съели его. После этого осталось пять корок. Как это может быть?

76.10. Некий человек, располагая определенной информацией, пытается установить время прибытия поезда в его город. Выясняется при этом, что чем медленнее поезд едет, тем раньше он прибывает. Как это может быть?

77. Задачи календаря.

77.1. Сколько месяцев в году содержат 30 дней?

77.2. Какое наибольшее число месяцев в году могут иметь 5 пятниц?

77.3. Докажите, что каждый год 13-е число какого-то месяца придется на понедельник.

77.4. Укажите дату, с которой начнется XXI век.

77.5. Фантастический роман начинался со слов: «Очередной век наступил в воскресенье». Укажите ошибку в этой фразе.

77.6. Докажите, что 13-е число чаще приходится на пятницу («черная пятница»), чем на любой другой день недели.

78. Дурацкие вопросы.

78.1. Большой, зеленый, живет под землей и питается камнями. Кто это?

78.2. Три черепахи ползали наперегонки. После окончания соревнований черепаха А заявила, что она опередила Б, черепаха Б сказала, что приползла не последней, а черепаха В утверждала, что была впереди А. Не могли бы Вы дать достаточно правдоподобное объяснение таким ответам?

78.3. Известно, что один бегемот весит 1 т. 800 кг. Сколько бегемотов может увезти машина грузоподъемностью в 5 т?

78.4. А сколько крокодилов сможет увезти та же машина, если вес одного крокодила 175 кг?

78.5. Почему все же зеркало меняет «право» и «лево», но не меняет «верх» и «низ»?

78.6. В 1865 г. появилось первое издание знаменитой книги Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес». В этой книге в сцене безумного чаепития шляпочник (в других переводах болванщик, англ. Hatter) ошарашивает Алису

загадкой: «Что общего между вороном и письменным столом (англ. writting desk)?». На этот вопрос Алиса так и не ответила. После выхода книги в свет в Англии, затем в Америке и во всем мире сотни тысяч людей задумывались над этой загадкой, пытались так или иначе на нее ответить. Давали свои ответы сам Кэрролл, известный автор головоломок Сэм Ллойд и другие личности. Попробуйте и Вы ответить на этот вопрос. Может, сегодня это можно сделать более обоснованно, чем во времена Льюиса Кэрролла?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Безусловно, при «нормальном» голосовании выиграть должен Б. Однако при данном соотношении сил члены фракции «Новая волна» имеют возможность для тактического маневра (от них этого можно ожидать). А именно, в первом туре они отдают 6 из своих 40% кандидату В, в результате чего тот проходит во второй тур, а там уже А побеждает.

Конечно, если члены других фракций догадаются о такой возможности, то все будет зависеть от их умения договориться, в частности, от способности «поступиться принципами» членов фракции «Фундаменталисты».

2. Больше всего шансов выжить в этой дуэли у В. Для этого он должен ждать окончания перестрелки между А и Б, стреляя мимо, даже если он начинает дуэль.

При всей надуманности описанной ситуации в жизни случаи, подобные ей, достаточно часты.

3. 5 т.

4. В этой задаче читателю навязывается неверный расчет, а он зачастую верит этому. (Навязывание некоего псевдорассуждения — типичный прием политиков и средств массовой информации). На самом деле, $13 = 10 + 3$, т. е. из 13 руб., потраченных ветеранами, 10 ушли в уплату за сапоги, а 3 — на оплату веселья денщика.

5. Тот, кому прибавляют по 50 руб. Его суммарный заработок после первого месяца и далее всегда превышает суммарный заработок второго на 50 руб.

6.1. Мы можем получить явно заниженную оценку на 150 лет. Имеем: изобретатель получает $\sqrt{2^{65}}$ зерен или $2^{63} \text{ (г)} = 8 \times (2^{10})^6 \text{ (г)} > 8 \times 10^{18} \text{ (г)} = 8 \times 10^{12} \text{ (т)} > 150 \times (5 \times 10^{10}) \text{ (т)}$.

6.2. Один день.

6.3. Через 59 с.

7.1. Это «чудовище». 7.2. 31-е число.

8. Последовательность, предлагавшаяся Ландау, образована первыми буквами слов, обозначающих последовательность натуральных чисел: «о» (один), «д» (два),... Правда, говорят, что вместо «один», Ландау говорил «раз» и начинал с буквы «р». 8.1. В последовательности 10, 11, 12, 13 по другому расставлены запятые — через три цифры. 8.2. Здесь чередование цифр чисел $\pi=3,14159...$ и $e=2,718228...$

9.1. Нью-Йорк. 9.2. Хабаровск. 9.3. Да. Гренландия относится к Европе и в ней есть такие точки. 9.4. Да. Командорские острова принадлежат западному полушарию. 9.5. Тихоокеанское окончание Панамского канала расположено восточнее его атлантического конца. 9.6. Если длины двух окружностей отличаются на 1 м, то разность их радиусов постоянна и равна $1/2 \pi$ (м), т. е. мышь может спокойно пройти. 9.7. Одной из таких точек является Южный полюс. Кроме него, имеется бесконечно много точек недалеко от Северного полюса. Это точки такие, что, пройдя 1 км на север и повернув на восток, человек сделает в своем движении на восток один (или два, три,...) целый оборот вокруг земной оси, после чего, пройдя 1 км на юг, вернется в исходное положение. 9.8. Таковыми являются точки, расположенные на 5 км южнее экватора. Но этим все не исчерпывается. Возможен, например, и такой маршрут. Человек, выйдя из точки А, проходит 10 км на север, затем проходит 10 км на запад и попадает в точку В, причем путь на запад происходил по большей дуге параллели, проходящей через В. Далее, идя на юг, он приходит в С и по меньшей дуге параллели АС возвращается в А. Такой путь возможен, если А находится на соответствующим образом вычисленной параллели. (Попробуйте произвести соответствующие расчеты). Возможны и более сложные маршруты.

10. Поскольку нулевого года нашей эры не было, то число лет, им прожитых, составляет $63+14-1=76$.

11. Свое заявление Петя делает 1-го января, 31-го декабря у него был день рождения, и ему исполнилось 11 лет, а 30-го было 10 (позавчера), а на будущий год исполнится 13, поскольку в этом году ему исполнится 12.

12. Машина всего выиграла 20 мин. Значит, до дачи

она «не доехала» 10 мин., а это означает, что прогулка продолжалась $60 - 10 = 50$ мин.

13. 48 км/ч.

14. Через 7 суток улитка поднимется на 7 м и еще через день достигнет вершины. Таким образом время подъема составляет 7,5 суток. Поскольку сползание за полсутки составляет 2 м, то продвижение улитки без сползания составило бы $3 + 2 = 5$ м. Из этого следует, что за день улитка спустится на $5 + 2 = 7$ м, затем за ночь сползет на 2 м и оставшийся 1 м преодолеет за $1/7$ дня или $1/14$ суток, а всего с начала движения пройдет $8 \frac{4}{7}$ суток.

15. Поскольку при правильной расстановке книг на полке первая страница первого тома примыкает ко второму тому, а последняя страница третьего — ко второму, то путь червяка равен толщине второго тома плюс два переплета, т. е. 17 мм.

16. Путешественники подошли к реке с разных сторон.

17. Обозначим пары через Аа, Бб, Вв (маленькими буквами обозначим женщин). Вот схема перевозок, реализующая нужную переправу за 11 переездов (в скобках указано, кто переправляется, слева и справа от скобок, кто будет на том и другом берегу в результате этой переправы): Бб, Вв (\rightarrow Аа) Аа; А, Бб, Вв (\leftarrow А) а; А, Б, В (\rightarrow бв) а, б, в; Аа, Б, В (\leftarrow а) б, в, Аа (\rightarrow БВ) Бб, Вв; Аа, Бб (\leftarrow Бб) Вв; а, б (\rightarrow АБ) А, Б, Вв; а, б, в (\leftarrow в) А, Б, В; а (\rightarrow бв) А, Бб, Вв; а, б (\leftarrow б) А, Б, Вв; (\rightarrow аб) Аа, Бб, Вв.

Задача о четырех парах неразрешима. Здесь Кэрролл ошибся. (Задача эта опубликована в книге Льюиса Кэрролла «История с узелками», издательство «Мир», Москва, 1973 г., стр. 384).

18. Если бы купец купил 138 аршин синего сукна, то он заплатил бы $138 \times 5 = 690$ руб. Образовавшаяся разность в 150 руб. получена за счет того, что черное сукно повышено в цене на 2 руб. Значит, черного сукна было $150:2 = 75$ аршин, а синего $138 - 75 = 63$ аршина.

19. Представим себе, что данные нам слитки надо поровну разделить между пятью людьми. Для этого мы должны каждый слиток разделить на пять равных частей и дать каждому два куска — по части от каждого слитка. Таким образом, мы имеем пять пар слитков и в

каждой паре одно и тоже количество золота. Одна пара слитков весит 1 кг и образует новый слиток, в котором 0,4 кг от первого и 0,6 кг от второго. В оставшиеся четыре войдут 1,6 кг от первого и 2,4 кг от второго.

20. Эту и подобные задачи удобно решать с конца. Получаем следующую цепочку: 30, 30, 30), (14, 14, 62), (6, 30, 54), (14, 26, 50). Иначе говоря, сначала у школьников было соответственно 14, 26 и 50 орехов.

21. Пусть в свинарниках в порядке обхода находится 6, 8, 10 и 0 свиней. Понятно, что на пути от первого свинарника к третьему условие соблюдено. Но в третьем свинарнике находится 10 свиней, а что может быть ближе к 10, чем само 10? Ничего. Вот это количество свиней (ничего, т. е. пустое множество) и находится в четвертом свинарнике. И т. д.

22.1. Поскольку после каждого распила число бревен увеличивается ровно на 1, то вначале было $72 - 53 = 19$ бревен. 22.2. После каждого разлома число частей возрастает на 1. Вначале был 1 кусок, в конце $8 \times 4 = 32$ куска. Число разломов равно 31, как бы этот процесс ни происходил. 22.3. После каждой игры выбывает 1 команда. Значит, число игр равно 99.

23. Если период длился T мин., то за это время минутная стрелка пройдет $T/60$ часть полного оборота, а часовая $T/60 \times 12$ часть. Путь минутной стрелки на пол-оборота больше пути часовой стрелки. Отсюда

$$T/60 - T/60 \cdot 12 = 1/2; T = 32 \frac{8}{11} \text{ (мин)}.$$

24. В течение суток есть 6 часов, в обозначении которых есть цифра 2 (2 часа ночи, 12 часов, 20, 21, 22, 23). В каждом из оставшихся часов это время равно 15 мин

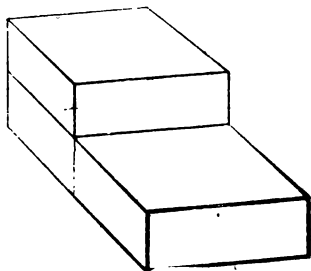


Рис. 14

(с 20 по 29 минуту и по одной в остальных десятиминутках). Всего $6 + 18 \times 1/4 = 10,5$ ч.

25. Можно, взяв три кирпича, сложить их, как показано на рис. 14. После чего легко произвести нужное измерение.

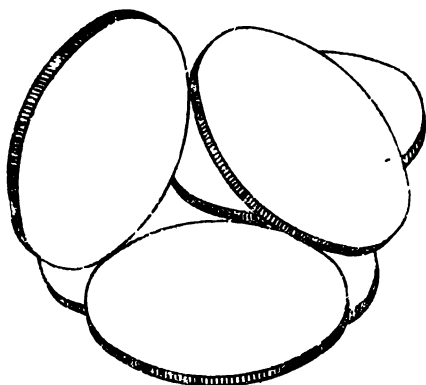


Рис. 15

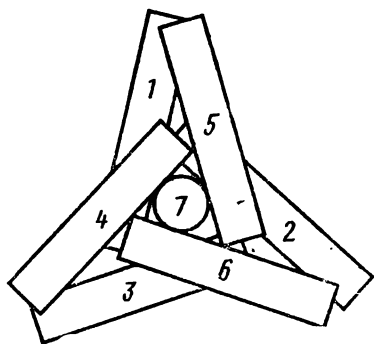


Рис. 16

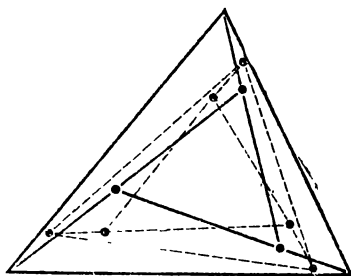


Рис. 17

26.1. См. рис. 15. 26.2. См. рис. 16 (вид сверху). 26.3. На рис. 17 показано, как можно в одной плоскости расположить основания всех 8 пирамид. При этом пирамиды, имеющие основаниями треугольники, изображенные сплошной линией, имеют общую вершину по одну сторону от этой плоскости, а треугольники, обозначенные пунктиром, соответствуют пирамидам с общей вершиной по другую сторону от этой плоскости.

Что касается вопроса о 9 пирамидах, то это задача относится к нерешенным проблемам. Никто еще не сумел найти такого расположения. По-видимому, его не существует. Однако доказательство невозможности математикам также неизвестно.

27. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду ABCD (рис. 18). В центре O этой пирамиды поместим источник света. Теперь возьмем шар, центр которого расположен внутри трехгранного угла, образованного лучами OA, OB, OC (можно на биссектрисе этого угла), такой, что точка O (расположена вне этого шара, а лучи OA, OB и OC пересекают его, т. е. шар, закрывающий сектор OABC. Затем другим шаром, но большего радиуса, чтобы он не пересекался с первым, закроем другой сектор (трехгранный угол) — OABD, затем последовательно возрастающими шарами закрываем два оставшихся сектора.

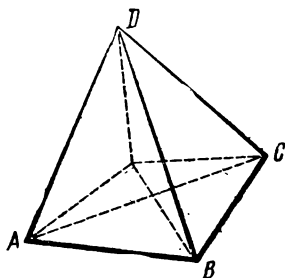


Рис. 18

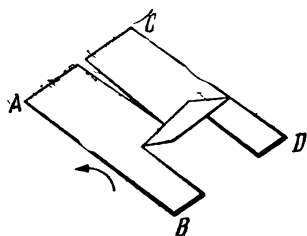


Рис. 19

28. Сначала сделаем вырез, как на рис. 19, затем перегнем один край AB на 180 градусов, после чего «загнем ножки» и сделаем сгиб.

29.1. 0, 1, 2, ..., 9.

29.2. Через три точки всегда можно провести хотя бы одну плоскость.

29.3. 10 коп. и 5 коп.

29.4. Первое выражение равно 1. Это следует из тождества $a^2 - (a-1) \times (a+1) = 1$.

Второе — равно 0, поскольку каждое из произведений равно числу $1991 \times 1992 \times 10001 \times 100010001$.

29.5. 13 212 руб.

29.6. Это событие невозможно (вероятность 0), пос-

кольку если 4 из 5 писем попали к нужному адресату, то и 5-е также.

30. Последовательность построений понятна из рис. 20.

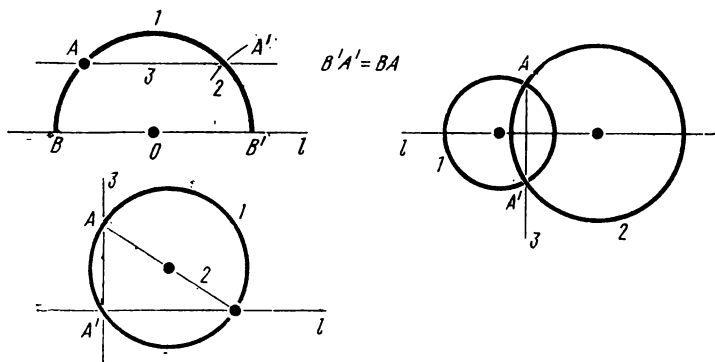


Рис. 20

31. Перед началом матча счет будет 0:0.

Это был турнир женских футбольных команд.

На первой записке значилось: «Вы напишете слово «нет»».

32. См. рис. 21. Вопрос о возможности разрезания квадрата на 5- равных частей иначе, чем на рис. 21, является нерешенной проблемой.

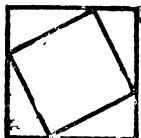
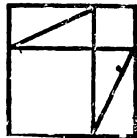
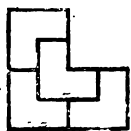


Рис. 21

Рис. 22

33. В различного рода литературе, в том числе и художественной, часто приводится доказательство, основанное на перекладывании частей квадрата, как на рис. 22 (квадрат разрезается сначала на 4 треугольника и 2 квадрата, а затем на 4 таких же треугольника и 1 квадрат).

34. Дегтя в меде ровно столько же, что и меда в дег-

те, независимо от числа и способа переливания (в бочке с дегтем удаленная часть дегтя заменена таким же количеством меда, и наоборот).

В картах, передаваемых зрителем фокуснику, число карт, лежащих правильно, т. е. вверх рубашкой, ровно столько же, сколько перевернутых в оставшихся 32. Фокуснику остается просто перевернуть переданные ему карты.

35. См. рис. 23.

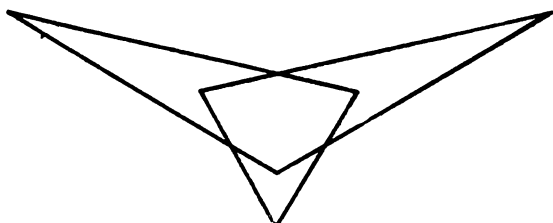


Рис. 23

36. Обозначим положения выключателей через А и Б. Последовательность операций следующая (предполагаем, что после первой и второй пещера не открылась). Сначала переключаем два каких-то соседних в положение А, а затем в одной из диагональных пар также приводим выключатели в положение А. Если пещера не открылась, то 3 выключателя находятся в положении А, а один в положении Б. Далее снова выбираем два соседних выключателя. В худшем случае они оба в положении А. Переключаем один в положение Б. Теперь возможны две ситуации: А/Б, А/Б, и А/Б, Б/А. Далее выбираем какие-то два по диагонали. Если они в одинаковом положении (второй случай), то переключаем оба, и пещера открывается. Если же их положение различно (случай 1), то ничего не переключаем, а делаем еще одну попытку, выбирая два соседних. Если они окажутся в противоположных положениях, то переключаем оба, после чего состояние приводится к уже рассмотренному случаю А/Б, Б/А.

37.1. Надо сначала разделить между 12 мальчиками 3 яблока, а затем разделить между ними 4 яблока. 37.2. Ни одной, поскольку оставшиеся 8 подались несколько вперед. 37.3. Сначала жарим на одной стороне

две котлеты. Затем через 2 мин. одну переворачиваем, а вторую снимаем и заменяем третьей. Еще через 2 мин. снимаем готовую, заменяем ее отложенной, а третью переворачиваем. Всего на поджаривание уйдет 6 мин.

37.4. Можно. Например, бросить его вверх.

37.5. Сначала запускаем обе пары часов, и когда истекнут 7 мин., начинаем варить яйцо. Когда же закончат свою работу 11-минутные часы, переворачиваем их.

37.6. Включаем один выключатель и некоторое время держим его включенным. Затем выключаем, включаем другой и быстро идем в соседнюю комнату. Одна лампочка горит, одна лампочка не горит, но зато теплая, а третья — ни то, ни другое.

38.1. В этом случае вероятность того, что оставшийся шар белый, равна $2/3$. Кто знаком с теорией вероятностей, без труда докажет это, исходя из формул Байеса. Остальным можно предложить следующее рассуждение. После того, как извлекли белый шар, мы имеем три равноправные возможности: остался черный шар (извлекли тот же, что и добавили), остался белый шар (извлекли тот же, что и добавили), остался белый шар (извлекли тот, что ранее лежал в ящике).

38.2. В этом случае вероятность останется прежней, т. е. $1/3$. Ведь, существу, арбитр никакой новой информации не сообщил, кроме того, что и так было известно, а именно. что один из двух, исключая А, приз не выиграл.

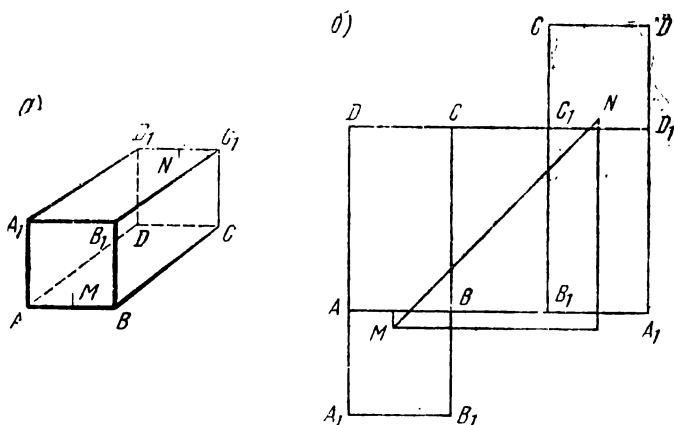


Рис. 24

39. На рис. 24а изображена комната. Рассмотрим путь, пересекающий последовательно ребра АВ, ВС, В₁С₁ и С₁Д₁. Для определения кратчайшего из этих путей сделаем развертку (рис. 24б). На этой развертке кратчайшему пути соответствует отрезок М, длина которого по теории Пифагора будет $\sqrt{(5\frac{1}{3})^2 + 4^2} = 6\frac{2}{3}$ м. Для других маршрутов путь длиннее. (Проверьте, сделав соответствующие развертки).

40.1. 1-я и 3-я являются развертками. Решения задач 40.2. и 40.3. понятны из рисунков 25 (а, б, в).

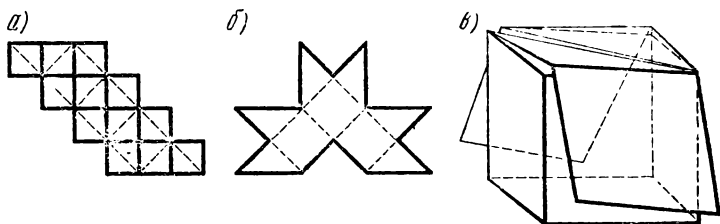


Рис. 25

41. Решение понятно из рис. 26,

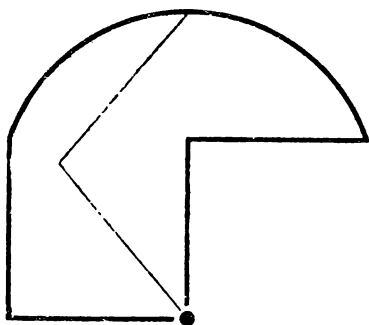


Рис. 26

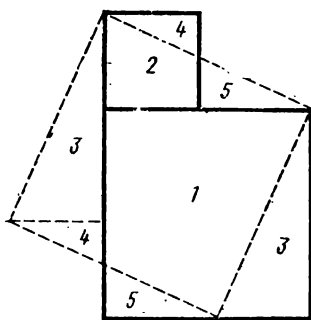


Рис. 27

42. На рис. 27 показано нужное разрезание в общем случае. Одинаковые части имеют одинаковые номера.

43. Надо подбросить монету дважды. Если выпало О (орел), Р (решка), то выигрывает один, если Р, О, то другой. В остальных случаях процедура повторяется.

44. В первой игре начинающий игрок первым ходом берет одну спичку, а затем каждый раз доподняет число спичек, взятых соперником, до 6.

Во второй игре также побеждает начинающий игру. Первым ходом он берет 4. Далее разбор игры лучше вести с конца. Назовем «безопасными» числа, соответствующие количеству спичек, оставив которые сопернику можно гарантировать себе выигрыш. Таковыми являются числа 7, 13, 20, 26, 34. Цель начинающего оставлять сопернику спички указанных количеств и не давать возможности ответить тем же.

Если сопернику оставлено 7, 20 и 34 спички, то тактика следующая: на взятие одной спички отвечается взятием трех спичек, и как бы соперник не играл, следующим ходом или игра заканчивается (при 7 спичках) либо ему возможно оставить вновь одно из «безопасных» чисел. При любом другом ходе соперника, ответ — дополнение взятого им до 7.

Если же сопернику оставлено 13 или 26 спичек, то в ответ на взятие трех спичек берется пять спичек, а при других — дополнение до 6.

45. Перестройка.

1. Апекс. 2. Апорт. 3. Арест. 4. Аскер. 5. Аскет. 6. Аспект. 7. Каперс. 8. Капор. 9. Капот. 10. Карст. 11. Картер. 12. Кастор. 13. Катер. 14. Копра. 15. Корсар. 16. Корсет. 17. Кратер. 18. Крейсер. 19. Крест. 20. Опера. 21. Опека. 22. Оркестр. 23. Отсек. 24. Пакет. 25. Паркет. 26. Парсек. 27. Партер. 28. Пастор. 29. Патер. 30. Перекат. 31. Перекос. 32. Перст. 33. Песета. 34. Песок. 35. Покер. 36. Порей. 37. Порка. 38. Претор. 39. Проект. 40. Прокат. 41. Просека. 42. Простак. 43. Рапорт. 44. Раскрой. 45. Растр. 46. Реактор. 47. Рейка. 48. Рейтар. 49. Реестр. 50. Ректор. 51. Репер. 52. Репей. 53. Рокер. 54. Ростер. 55. Секатор. 56. Секта. 57. Секрет. 58. Сектор. 59. Сетка. 60. Скопа. 61. Скрепер. 62. Сойка. 63. Сопка. 64. Сотка. 65. Спектр. 66. Спора. 67. Спорт. 68. Стайер. 69. Стойка. 70. Стопа. 71. Стека. 72. Стопка. 73. Строка. 74. Стропа. 75. Тапок. 76. Тесак. 77. Топка. 78. Тоска. 79. Трепак. 80. Треск. 81. Треска. 82. Тропа.

Вертикаль:

1. Актив. 2. Артель. 3. Артикль. 4. Валик. 5. Вальтер. 6. Ветка. 7. Ветла. 8. Вилка. 9. Враль. 10. Карел. 11. Картель. 12. Катер. 13. Кельт. 14. Кивер. 15. Кильватер. 16. Китель. 17. Клави́р. 18. Кларет. 19. Клеть. 20. Криль.

21. Лекарь. 22. Ливѣр. 23. Литер. 24. Литера. 25. Реактив. 26. Реликт. 27. Таяер. 28. Тальк. 29. Тарель. 30. Тварь. 31. Трель.

46.1. Поскольку «сын моего отца» это я сам, то получается, что данное утверждение можно заменить на «сын того, кто на портрете — я сам». Значит, на портрете мой отец.

Во втором случае на портрете мой сын.

46.2. Здесь зашифровано известное четверостишие: «Наша Таня громко плачет...». Правило очень простое: гласные буквы образуют естественные пары (а-я, о-ё, ...), взаимозаменяющие друг друга. Также на пары разбиты согласные: звонкие — глухие (б-п, в-ф, ...). Кроме того, достаточно естественно добавлены пары л-р, м-н, и ч-щ.

46.3. У автобуса с одной стороны есть двери. Поскольку двери не видны, то, учитывая правосторонность нашего автомобильного движения, автобус движется по противоположной стороне шоссе, т. е. возвращается в Москву.

46.4. Не хватит. Этот остаток будет использован за 1 день.

46.5. Может. Для этого надо, вырезав отверстие размером с трехкопеечную монету, сложить лист по диаметру этого отверстия и несколько развести концы получившегося полукруга, благо бумага легко поддается деформации. В получившуюся щель легко пройдет пятак.

46.6. См. рис. 28.

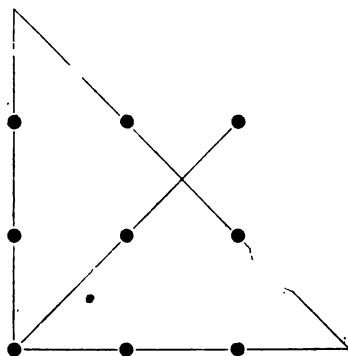


Рис. 28

47. Секрет задачи в том, что предложенная сумма,

по-видимому, превышает стоимость всего кваса в бочке, а это значит, что в некоторый момент продавец имеет возможность вылить остатки кваса из бочки и использовать ее как дополнительную емкость. Возможен следующий порядок действий, ясный из схемы (1-я кружка 3-х литровая) $(0,5) \rightarrow (3,2) \rightarrow (0,2) \rightarrow (2,0) \rightarrow (2,5)$.

Отмерив 7 л, опоражниваем бочку, сливаем в нее 7 л и действуем по схеме (третье число — квас в бочке): $(0,0/7), (3,0/4) (0,3/4) (3,3/1) (1,5/1) (1,0/1) (1,1/0)$.

48.1. За 7 анализов можно найти зараженную пробу, не более чем из $2^7 = 128$ проб. Если бы число проб было более 129, то исследование на первом шаге 1-й пробы было бы нерациональным, так как (в случае отрицательного результата) осталось бы после этого по-прежнему более 128 неисследованных проб, а значит число оставшихся анализов будет более 7. Поскольку, по мнению профессора, исследование на первом шаге 1-й пробы не меняет оптимальности процедуры, то число исследуемых проб равно 129.

48.2. Задуманное число можно угадать за 7 вопросов. Сделать это можно, например, следующим образом. Запишем числа от 1 до 16 в двоичной системе исчисления, приписав, если это необходимо, спереди несколько нулей, чтобы получилось четырехзначное число. Числу же 16 поставим в соответствие четверку нулей. Пусть это число $abcd$, где каждая из цифр 0 и 1. Зададим сначала 4 вопроса, выясняющие четность соответствующей цифры. Пятым сформулируем следующий вопрос: четна ли сумма первых трех цифр? Если ответ совпадает с уже известным нам значением, то вранья еще не было, все эти три цифры верны, и за оставшиеся два вопроса мы с гарантией уточним значение четвертой цифры. Если же ответ разойдется, то один из ответов ложен. Тогда мы выясним четность суммы двух первых цифр. При совпадении уточняем цифру c . При расхождении (при этом, ясно, что обман произошел, когда мы выясняли одну из этих первых двух цифр), задаем вопрос о четности первой цифры.

Покажем, что за 6 вопросов угадать задуманное число нельзя. После 6 вопросов мы получаем последовательность из шести «да» и «нет», т. е. всего 64 различных комбинации. Каждой из таких комбинаций соответствует одно из чисел от 1 до 16. Но при этом замена в какой-то комбинации «да» на «нет», или наоборот, не должна

менять соответствующего числа, т. е. одно и то же число соответствует семи наборам. Но $16 \times 7 > 64$. Противоречие.

49.1. Если длина одного плеча равна 1, а другого A , то при взвешивании на одной чашке покупатель получает A кг, а при взвешивании на другой $1/A$ кг. Но по известной школьной теореме о среднем $A + 1/A \geq 2$, причем равенство имеет место лишь при $A = 1$. Значит, как ни странно, в выигрыше остается покупатель.

49.2. Фальшивую монету можно определить за четыре взвешивания. Алгоритм следующий. Первое взвешивание: кладем на две чаши по 27 монет. В случае равновесия фальшивая среди оставшихся 26. Если же одна чаша легче, то фальшивая среди лежащих на ней 27. Второе взвешивание: кладем на обе чаши по 9 монет из числа «подозреваемых», и т. д. Как видим, здесь деление не пополам, а на три, по возможности, равные части. Покажите самостоятельно, что быстрее найти фальшивую нельзя (гарантированно).

49.3. Занумеруем наши монеты числами от 1 до 12. Алгоритм (ветвящийся) следующий:

1-е взвешивание. Кладем на чаши наборы 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8. Возможны два случая:

1-й случай. Весы в равновесии. Это значит, что фальшивая среди оставшихся с 9 до 12 монет. Этот случай достаточно прост. (Сравниваем монеты 9 и 10 с 1 и 2. Если равновесие, фальшивая одна из двух — 11 и 12. За одно взвешивание она легко находится. Если равновесия нет, то еще проще. Фальшивая — одна из 9 и 10, причем известно даже, легче она или тяжелее настоящей.

2-й случай (основной). Чаша A легче. Фальшивая среди взвешиваемых.

2-е взвешивание. Кладем на чаши наборы 9, 10, 11, 4 и 1, 2, 3, 8. Возможны три случая.

1-й. Чаша A по-прежнему легче. Тогда фальшивая одна из двух монет: 4 или 8 (их положение не менялось). И достаточно 1-го взвешивания для ее обнаружения.

2-й. Весы уравнились. Фальшивая одна из монет 5, 6, 7, причем она тяжелее настоящей. Остальное понятно.

3-й случай. Легче стала чаша B . Фальшивая одна из монет 1, 2, 3, и она легче.

49.4. Обозначим массы булыжников A, B, B, G и D .

Первые два взвешивания сделаем следующие: сравниваем А и Б, затем В и Г. Можно считать, что обозначения таковы, что $A < B$, $B < G$. —

Третье взвешивание — сравниваем Б и Г. Поскольку обе возможности равноправны, то будем считать, что $B < G$. Итак, после трех взвешиваний мы знаем, что $A < B < G$ и $B < G$.

Четвертое взвешивание. Сравниваем Д и Б. Возникает два случая:

а) $B < D$. Без учета В булыжники А, Б, Г и Д располагаются в порядке возрастания или АБГД или АБДГ. А про В мы знаем лишь, что $B < G$

Пятым взвешиванием сравниваем В и Б. Если $V < B$, то шестым и седьмым взвешиванием сравниваем А с В и Г с Д. Если же $V > B$, то шестым взвешиванием сравниваем В с Д, а седьмым (если потребуется) Г с Д.

б) $B > D$. Возможны случаи АДБГ и ДАБГ и $B < G$. Здесь сравниваем В и Д. Если $V > D$, то шестым и седьмым взвешиванием сравниваем В и Б, А и Д. Если же $V < D$, то сравниваем А и Д, затем В и А.

50. Покажем, как сначала решить подобную задачу для 9 шаров, из которых 2 радиоактивных, за 6 проверок. Проверяем на радиоактивность три любых шара. Если радиоактивности нет, то найти из 6 шаров два радиоактивных за пять проверок труда не составит. Если же эти три показывают радиоактивность, то проверяем на радиоактивность последовательно по отдельности любые два шара. Если хотя бы один из них радиоактивен, то присовокупляя оставшийся к 6, за три проверки из семи шаров легко найдем один радиоактивный. (Делением пополам можно найти из восьми).

Теперь покажем, как за семь проверок найти 2 радиоактивных шара из 13. Проверяем какие-то четыре. Если чисто, то остаются 9 шаров и 6 проверок. Эту задачу мы умеем решать. Если радиоактивность есть, проверяем два из этих четырех, а затем находим хотя бы один радиоактивный из этих четырех. Объединив все оставшиеся шары, за четыре проверки найдем из них (12 шагов) один радиоактивный.

И, наконец, рассмотрим нашу задачу. Проверяем пять шаров. Если радиоактивности нет, приходим к предыдущей задаче. В противном случае проверяем два из этих пяти. (Вторая проверка, остается 6). Если нет радиоактивности, то за две проверки из трех находим хо-

тя бы один радиоактивный, а затем (если необходимо) из оставшихся 15 за четыре проверки находим один. Аналогично поступаем, если при проверке 2 радиоактивность есть.

51. Любая сумма из 50 и 100-рублевых купюр — четная. Поскольку 1991 купюра достоинством в 1, 3, 5 или 25 руб. (все числа нечетные) дает нечетную сумму, то ошибка налицо.

51.2. Сумма исходных чисел равна 21, т. е. является числом нечетным. При каждой операции она возрастает на 2, т. е. остается нечетной. Значит, все числа не могут стать равными, так как в этом случае сумма их будет четной.

51.3. На другом конце также 5.

51.4. Возьмем наибольшую степень двойки, входящую в знаменатель рассматриваемых дробей. Это единственная дробь, имеющая вид $1/2^k$. При приведении всех дробей к общему знаменателю числители всех дробей будут четными, кроме одного, а значит, числитель суммы будет нечетным, а знаменатель — четным.

51.5. Пронумеруем всех по кругу от 1 до 50. Рассмотрим девочек, имеющих четные и нечетные номера. Пусть вторых больше, чем первых, т. е. на нечетных номерах сидят не менее 13 девочек. Предположим, что хотя бы на одном из нечетных мест сидит мальчик. Все оставшиеся 24 нечетных места можно разбить на 12 пар соседей (они соседи сидящему на четном месте между ними). Если мальчик на месте 1, то остальные разбиты на пары (3, 5); (7, 9); ...; (23, 25). Хотя бы одна пара занята двумя девочками, т. к. иначе их окажется менее 13.

52.1. Поставим в соответствии стакану, стоящему нормально, +1, а стоящему вверх дном, —1. Инвариантом здесь будет произведение чисел, соответствующих всем 7 стаканам, так как при изменении знака у 4 сомножителей произведение не меняется. Но в начальном положении это произведение равно —1, а значит, стать +1 оно никогда не сможет.

52.2. Будем считать, что знаку «+» соответствует +1, противоположенному —1. Инвариантом будет произведение чисел, расположенных в кайме, состоящей из 8 клеток — по 2 в первой и последней строке и 1-м и 4-м столбце. При любой операции меняется знак у двух чисел каймы, а значит, произведение не меняется. Вначале оно —1, и не может стать равным +1.

53.1. Раскрасим квадраты в шахматном порядке. При каждом переходе меняется цвет квадрата. Поэтому, если такой маршрут возможен, то число шагов должно быть четным, т. е. m или n четно. Осталось проверить, что в этом случае искомый маршрут возможен.

2	3		1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2		4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4		2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

Рис. 29

53.2. Раскрасим клетки в 4 цвета, как на рис. 29. Каждый «линкор» закрывает четыре клетки разного цвета. Но клеток цвета 2 всего 26, а «линкоров» должно быть 25.

Эта же раскраска помогает ответить и на второй вопрос. Наименьшее число выстрелов равно числу клеток цвета 4, т. е. 24.

54. См. рис. 30.

55. 6210001000; 7101001000 и 6300000100. Последнюю пару можно получить, например, следующим образом. Возьмем произвольное 10-значное число, например, 5500000000. Следующее число будет указывать, сколько в исходном числе нулей, единиц и т. д., т. е. это будет число 8000020000, затем получим третье число, и так, пока процесс не стабилизируется.

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3, \\ 407 = 4^3 + 7^3.$$

$$370 = 3^3 + 7^3,$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3,$$

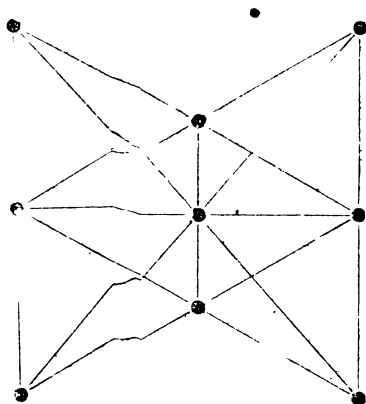


Рис. 30

56.1. Утверждение следует из того, что возможное число сыгранных матчей меньше числа команд (исключая сначала команды, не сыгравшие ни одного матча). Здесь «кролики» — команды, клетки — число сыгранных матчей.

56.2. Рассмотрим последовательность чисел 1, 11, 111,.... Допустим, что ни одно не делится на 1993. Поскольку остатки от деления на 1993 могут равняться числам от 1 до 1992, то найдутся среди нашей последовательности два числа, дающие при делении на 1993 одинаковые остатки. Тогда их разность делится на 1993. Откинув в этой разности нули, получим число из одних единиц, делящееся на 1993.

56.3. Возьмем все четные числа среди 11 выбранных и разделим каждое на максимальную степень двойки, чтобы в частном получилось нечетное число. Имеем теперь 11 нечетных чисел меньше 20. Среди них есть равные (всего нечетных чисел 10). Отсюда следует наше утверждение. 56.4. Пусть n — наибольшее число сторон у грани. Тогда к соответствующей грани прилежит n граней с числом сторон меньше n . Среди них будут хотя бы две с равным числом сторон.

56.5. Данную доску можно разрезать на два прямоугольника 10 способами (5 вертикальных разрезов и 5

горизонтальных). Если при этом задеваются всякий раз костяшки домино, то при каждом разрезе мы должны разрезать хотя бы две костяшки. При этом различными разрезами разрезаем различные костяшки, т. е. число разрезаемых костяшек будет $10 \times 2 = 20$, а всего костяшек — 18. Противоречие. Значит, хотя бы один разрез не задевает ни одной костяшки домино.

57.1. Вероятность совпадения двух карт близка к $2/3$, т. е. пари невыгодно.

57.2. Еще более удивителен ответ во второй задаче. Уже у 24 человек вероятность совпадения для каких-то двух дней рождения более $1/2$. А для 40 эта вероятность превышает 0,9.

Подробные расчеты в обоих случаях не очень сложны, хотя и несколько громоздки. Мы их опускаем.

58. Верхняя карта останется прежней, так же, как и 11-я снизу. В прежнее положение колода вернется после 5 тасовок.

59. $698\,896 = 836^2$, $1809 \times 9 = 9801$ или $2178 \times 4 = 8712$.

60.1. Самый мудрый из мудрецов через некоторое время может догадаться с помощью следующего рассуждения: «Допустим, на мне белый колпак. Тогда каждый из двух, исключая меня, видит перед собой один белый и один черный колпак. В этом случае, предположив, что на нем также белый колпак, один из них легко догадается, что на нем не может быть белого колпака, поскольку в этом случае третий видел бы перед собой два белых колпака и мгновенно, даже не будучи мудрецом, понял бы, что на нем черный колпак. А это означает, что на мне также черный колпак».

60.2,3. Что касается двух других ситуаций, то, поскольку подобное обсуждение хотя и весьма интересно, однако требует гораздо больше места, чем позволяют возможности этой книги, ограничимся одним замечанием. Реальная жизнь, грубо вторгаясь в иллюзорно-математические конструкции, показывает, что абстрактные математические рассуждения ей абсолютно чужды и ей глубоко наплевать на беспомощные заклинания шаманящих логиков.

61. Портфель украл Босс. В самом деле, предположим, что портфель украл Весли. Тогда в высказываниях Арчи верными являются утверждения 1 и 3, а неверным — утверждение 2. В то время, как у Весли неверным является утверждение 1, а верными 2 и 3. Но

2-е утверждение Арчи совпадает с 3-м утверждением Весли. Противоречие, доказывающее что Весли не брал портфеля. В этом случае 1-е утверждение Арчи должно быть верным (ложно 3-е). Значит, украл портфель Босс.

62. Стороны сечения при продолжении пересекают переднее ребро тетраэдра в двух различных точках. Этого не может быть, поскольку плоскость пересекает не принадлежащую ей прямую не более, чем в одной точке.

В обоих случаях стороны внутреннего четырехугольника при продолжении пересекают соответствующие стороны квадрата в четырех точках, не лежащих на одной прямой. Этого не может быть, поскольку две плоскости пересекаются по прямой.

63. Выделим 1 рыцаря. Среди оставшихся 7 можно составить $(7 \times 6)/2 = 21$ пар. Из этого уже следует, что число лет не может превосходить 21. (Даже если различными должны быть пары лишь у одного рыцаря). Приведем пример 21 варианта расположения 8 рыцарей с соблюдением требуемого условия. (Последний сидит рядом с первым):

12345678 13527486 14263857 15643782 16275384 17425863
18237645 12568743 13746825 14387562 15738264 16358427
17632458 18453276 12784356 13862574 14576238 15824637
16482735 17856342 18674523.

64. Пронумеруем монеты числами от 1 до 10. Вот одна из возможных последовательностей из 5 ходов, ведущая к цели: монета 7 кладется на монету 10, 5 — на 2, 3 — на 8, 1 — на 4, 9 — на 6.

65. Обозначим через a_k и b_k число кур и петухов на k -м этапе. На 1-м этапе $a_1=1$, $b_1=0$, кроме того, по условию $a_{k+1} + b_{k+1} = 2a_k$. Запишем все такие равенства от 1-го до последнего этапа ($a_n=0$) и сложим их:

$$a_2 + b_2 = 2a_1; a_3 + b_3 = 2a_2; \dots a_n + b_n = 2a_{n-1} - 1.$$

$$a_2 + a_3 + \dots a_n + b_2 + \dots + b_n = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1};$$

$$b_2 + \dots b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Таким образом, петухов на 1 больше кур, т. е. в нашем случае кур оказалось 16.

66. Мы умеем получать 8 из 1 за 15 шагов, а 32 — за 35 шагов. Вот эта цепочка: 1 3 7 15 31 63 127 42 85 171 343 114 229 258... 2576 153 307 102 205 411 823 274 91 183 367 735 1471 2943 5887 11775 8928 1309 436 145 48 97 32.

67. Назовем позицию «безопасной», если оставляя

ее сопернику, нет опасности проиграть (при верной игре). Мы не будем заниматься проведением подробного анализа игры в «ним», а сразу укажем общий вид «безопасных» позиций. Запишем в двоичной системе количество спичек в каждой из кучек. Получим несколько чисел, состоящих из 0 и 1. Подсчитаем сначала число единиц в первом разряде (на последнем месте), затем число единиц во втором разряде (на втором с конца месте) и т. д. Получим столько чисел, сколько знаков в двоичном числе, соответствующем наибольшей кучке. «Безопасными» будут все такие позиции, у которых все полученные числа являются четными. Можно убедиться, что любой ход в «безопасной» позиции переводит ее в «опасную», и, наоборот, для любой «опасной» позиции существует ход, переводящий ее в «безопасную».

В нашем случае $7 = 111(2)$; $11 = 1011(2)$; $13 = 1101(2)$. Как видим, нечетной является сумма единиц в первом разряде (на последнем месте). Взяв одну спичку из любой кучки, мы переведем позицию в «безопасную». Дальнейшая игра определяется ответами соперника.

68. Пусть одновременно с первым работают и двое оставшихся. По условию, за время работы первого двое других выкопают полканавы. Точно так же, пока работает второй, первый и третий выкопают еще полканавы, а пока работает третий, полканавы выкопают первый и второй. Значит, за 8 ч все вместе выкопают канаву и еще полторы канавы, всего $2,5$ канавы, а одну канаву втроем они выкопают за $8:2,5 = 3,2$ ч.

69. Понятно, что хотя бы в одном из двух сосудов содержание яблочного сока не превышает 40%. При этом условии наибольшее количество яблочного сока в 2,5 л будет, если мы смешаем 0,5 л (40%) сока с 2 л чистого (100%) сока. В этом случае в 2,5 л будет $0,5 \times 0,4 + 2 = 2,2$ л яблочного сока, что составит ровно 88%. Таким образом, в сосуде емкостью 1 л содержится 40% яблочного сока, а в двухлитровом — чистый яблочный сок.

70. Покажем, как путешественник может достичь отметки 137 км. Наметим сначала места для складов: первый склад расположим в 12 км от базы (склад А), склад Б расположим в 15 км от склада А, затем склад В на расстоянии 20 км от Б, и, наконец, склад Г на расстоянии 30 км от В. Процедура передвижения будет следующей. Сначала путешественник переносит весь запас с базы на склад А. Один переход от базы до склада А

занимает $3/5$ дня. Пятым рейсом от базы на склад А путешественник закончит процесс переноса продуктов на эту базу. Отложим от оставшегося запаса продукты, необходимые для возвращения от А на базу. Останется $6 \times 4 = 24$ -дневный запас (потрачено на эту процедуру с учетом отложенного количества $9 \times 3/5 + 3/5 = 6$ -дневный запас). Переход от склада А до склада Б занимает $3/4$ дня. Вновь перенесем весь 24-дневный запас с А на Б. Отложим часть, необходимую для возвращения, с Б в А. Останется $6 \times 3 = 18$ -дневный запас. Перенеся этот запас с Б в В и отложив количество, необходимое для возвращения из В и Б, получим на складе В 12-дневный запас. Этот запас в два приема переносится на склад Г, в результате чего на складе Г образуется запас на один 6-дневный переход, в результате которого мы имеем возможность удалиться от Г на 60 км, и на возвращение на склад В.

Предложенная процедура позволяет максимально удалиться от базы при заданных условиях ($12 + 15 + 20 + 30 + 60 = 137$ км). Обоснование, почему это так, приводить не будем.

Аналогичная процедура реализуется во втором случае, с той лишь разницей, что на складах не надо оставлять продукты для возвращения. Таким путем можно преодолеть пустыню шириной в 120 ($1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9$), что больше 210 км.

71. Возможны три случая.

1. К моменту второй встречи оба прошли по одному разу весь путь. Пусть S — расстояние между домами. К первой встрече суммарный путь равен S , ко второй — $3S$. Профессор прошел $3 \times 55 = 165$ м. С другой стороны, его путь $S + 85$, т. е. $165 = S + 85$, $S = 80$. Но по условию расстояние между домами более 85 м. Значит, этот случай невозможен.

2. Предположим, что во второй раз профессор догнал доцента. Но тогда скорость профессора превышала бы скорость доцента более, чем в 2 раза. Значит, путь, пройденный доцентом к моменту первой встречи, был бы менее половины пути профессора, т. е. меньше $0,5 \times 55$, а расстояние между домами будет меньше, чем $55 + 27,5 = 82,5 < 85$. Этот случай также невозможен.

3. Остается одно — доцент догнал профессора. Но отношение путей, пройденных профессором и доцентом во все моменты времени, постоянно и равно отношению

их скоростей. В момент первой встречи эти пути соответственно 55 и $S - 55$, в момент второй (точнее, в момент, когда доцент догнал профессора) их пути $S - 85$ и $2S - 85$. Имеем пропорцию $55/(S-55) = (S-85)/(2S-85)$. По известному свойству пропорций каждая из этих дробей равна $(S - 195)/25$. (Если $a/b=c/d$, то $a/b=c/d=(c-2a)/(d-2b)$), т. е. $(S - 195)/25$ также отношение скоростей профессора и доцента, значит, когда доцент прошел 25 м, профессор прошел $S - 195$ м, и был на расстоянии 195 м от дома доцента. Расстояние между киосками будет $195 - 25 = 170$ м.

72.1. Надо сделать петлю в середине веревки, просунуть ее между рукой и надетой на нее веревкой, надеть на руку, пропустить вниз по руке между рукой и ранее надетой на нее веревкой, после чего снять с руки. Потянув за веревку, завяжем теперь на ней узел.

72.2. Покажем, как прицепить карандаш с петлей к пиджаку. Кусок пиджака вместе с пиджачной петлей просовывается в петлю карандаша на такое расстояние, чтобы можно было карандаш продеть в петлю пиджака. При снятии последовательность операции обратная. Правда, проделать ее несколько сложнее.

72.3. Надо передвинуть кольцо к среднему отверстию, чтобы петля А проходила под ним. Затем, потянув за веревки, выходящие из среднего отверстия, вытащить петлю А из него. Передвинуть кольцо по выступившей из отверстия петле А под обеими веревками вправо. Вдернуть обратно в среднее отверстие петлю А. Кольцо окажется на правой стороне. Его еще надо передвинуть правее под петлей А.

Кстати, для этой головоломки можно использовать и иные подручные средства. В качестве среднего отверстия можно взять любое естественное отверстие, например замочную скважину. Вместо кольца можно использовать обычный ключ. Концы веревки привязать к стульям.

73. Спрашивающий знает, произведение и сумму трех натуральных чисел, но не может их определить. Поскольку речь идет о математике, то справедливо было бы предположить, что если бы по этим данным можно было бы определить три числа, то он это сделал бы, на то он и математик. Значит, сумма и произведение таковы, что определить три числа нельзя. Если мы переберем все натуральные числа в разумных, соответствующих усло-

вию задачи пределах, например от 20 до 60, то убедимся, что почти во всех случаях эти числа раскладываются на произведение из трех сомножителей, имеющих различные суммы. Есть только* два исключения. $36 = 1 \times 6 \times 6 = 2 \times 2 \times 9$, суммы множителей 13, и $40 = 2 \times 2 \times 10 = 1 \times 5 \times 8$, суммы 14. Подходит лишь последний вариант, в котором есть средний сын. Итак, возраст сыновей 1 год, 5 и 9 лет.

74.1. Рассмотрим шар радиусом r с центром в точке пересечения осей цилиндров. Любое сечение плоскостью, параллельной осям, шара и общей части цилиндров дает нам квадрат, описанный около круга, отношение площадей которых постоянно и равно $4/\pi$. Значит, таким же будет и отношение объемов этих тел. Поскольку объем шара равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, то объем искомого тела равен $\frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{4}{\pi} = \frac{16}{3}\pi r^3$.

74.2. Если заданная кривая является многоугольником, то объем «блина» легко вычисляется. Он складывается из призмы объема $2Sr$, системы полуцилиндров с радиусами r и суммой осей l , объем которых $\pi/2 r^2 l$, и набора шаровых «долек», в сумме дающих весь шар. Т. е. в этом случае объем блина равен $2Sr + \pi/2 r^2 l + \frac{4}{3}\pi r^3$. Понятно, что таким же он будет и в общем случае.

75. Время вытекания из бочки высоты H зависит от H и g , оно также прямо пропорционально площади основания бочки и обратно пропорционально площади отверстия. Два последних параметра вместе образуют безразмерную величину. Итак, из параметров, определяющих время вытекания лишь два размерные. Но из величин H (размерность см) и g (размерность см/с²) получить время t (размерность с) можно лишь, поделив первое на второе, после чего надо извлечь корень. Итак, если $t(H)$ время вытекания из бочки высотой H , то $t(H) = C \sqrt{H/g}$. По условию полбочки вытекло за 1 ч, т. е. $C \sqrt{H/g} = C \sqrt{H/2g} = 1$ ч. Откуда $t(H/2) = C \sqrt{H/2g} = \sqrt{2+1}$ (ч) — есть время, за которое вытечет вторая половина бочки.

76.1. Встречных поездов будет столько, сколько пройдет мимо неподвижного наблюдателя за 4 ч. При движении в одном направлении число встречных поездов будет 13, при движении в другом 9.

76.2. Надо взять пятый стакан, перелить содержимое во второй и поставить на место.

76.3. Сначала квадрат надо повернуть на 180 градусов (или два раза на 90 градусов) вокруг одной из диагоналей, а затем еще раз на 180 градусов вокруг одной из сторон. Результат можно заменить одним поворотом на 90 градусов вокруг соответствующей вершины (в плоскости квадрата).

76.4. Слово «кофе», в отличие от слова «чай», написанное печатными буквами, имеет ось симметрии.

76.5 $101 - 10^2 = 1$,

76.6. -1 и $1/2$.

76.7. Площадь треугольника, отмеченного на рис. 12 жирными точками, равна половине каждого из параллелограммов.

76.8. На рис. 13 21 квадрат. Удалить 6 точек можно, например, так, как показано на рис 31.

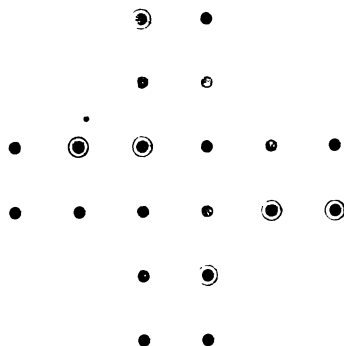


Рис. 31

76.9. Арбуз можно разрезать на такие части, у которых после удаления мякоти будет более одной корки. Например, ситуация, описанная в условии задачи, может возникнуть следующим образом. Нарисуем на поверхности арбуза треугольник ABC, затем проведем три разреза по лучам AB, BC и CA. Образуются в результате три «нормальных» куска и один в виде своего рода треугольной призмы.

76.10. Например. Человек, живущий в Волоколамске, интересуется временем прибытия в его город поезда Рига—Москва. Он звонит на Рижский вокзал в Москву, узнает время прибытия интересующего его поезда в Москву, после чего пытается высчитать время, когда этот поезд будет в Волоколамске. Понятно, что чем меньше

предполагаемая скорость поезда, тем раньше он будет в Волоколамске.

77.1. Все, кроме февраля.

77.2. 5 месяцев. Для обычного года это будет, если 1 января пятница. Для високосного есть две возможности — 1 января пятница или четверг. Самое простое — проверить все возможности для первого дня года.

77.3. Если 13 января — понедельник, то 13 июня — пятница, если 13 января — вторник, то 13 февраля — пятница, и т. д.

77.4. 1 января 2001 года.

77.5. Наш григорианский календарь имеет период 400 лет. Здесь уместно напомнить, что каждый четвертый год високосный, при этом года, делящиеся на 100 и не делящиеся на 400, не являются високосными. Весь цикл содержит ровно 20871 неделю. Первым днем столетия может быть либо вторник (1 января 1901 года), либо понедельник (1 января 2001 года), либо суббота (1 января 2101 года), либо четверг (1 января 2201 года). Далее все повторяется. Очередной век не может начаться в воскресенье.

77.6. Объяснение этого явления то же, что и в предыдущей задаче — 400-летний период нашего календаря. Остается лишь «честно» подсчитать, сколько раз 13 число будет пятницей, а сколько другим днем недели. Читатель может заняться этой деятельностью на досуге, можно при этом воспользоваться помощью компьютера.

78.1. Большой Зеленый Камнеед.

78.2. Если согласиться с тем, что существуют говорящие черепахи, то вполне возможно, что среди них есть и не очень правдивые. Короче, одна из них сказала неправду.

78.3. 2-х бегемотов. 78.4. Поскольку в машине уже находятся два бегемота, то увезти можно еще 8 крокодилов.

78.5. За невозможностью обстоятельно ответить на этот вопрос отсылаем читателя к 1-й книге М. Гарднера «Этот правый левый мир» (Москва, изд-во «Мир», 1967 г.).

78.6. Сегодня мы с достаточным основанием можем сказать, что ворон и письменный стол объединены тем, что оба попали в знаменитую загадку Л. Кэрролла. Сейчас такой ответ не просто некий математический трюизм.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От автора .	3
Вопросы и задачи	6
Ответы и решения	38

Игорь Федорович Шарыгин
Математический винегрет

Редактор *В. В. Цылев*
Обложка художника *В. Е. Те*
Технический редактор *О. Н. Крайнова*

Сдано в набор 08.07.1. Подписано в печать 25.10.91. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага офсетная. Гарнитура лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,36. Усл. кр.-отт. 3,78. Уч.-изд. л. 3,2. Тираж 100 000 экз. Цена 2 р. 60 к. Заказ 1451.
Отпечатано в издательстве «Поділля», г. Хмельницький, пр. Мира, 59.

